

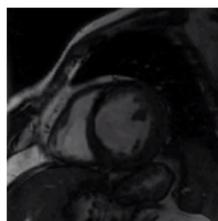
L'approche ondelettes quaternioniques pour l'analyse du mouvement cardiaque

Y. Farouj

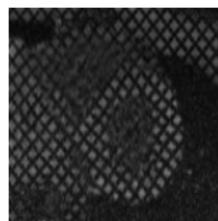
Creatis, INSA de Lyon

20 octobre 2014

- **Objectif** : Détection et caractérisation de pathologies.
- **Critères** : Champs de vitesses \implies Cartes de déformation (strain),
Pathologie = singularités dans le mouvement.



(a) Ciné



(b) Taggé

→ Ici, utilisation d'images taggées.

Spécificité du problème

- Intensité de l'image variable au cours du temps \implies difficile d'utiliser des approches de type flot optique basées sur l'intensité.
- Pathologie = Irrégularités dans le mouvement éventuellement localisées sur une petite zone du myocarde
 \implies nécessité d'éviter au maximum des approches par régularisation, intérêt d'avoir des méthodes permettant d'estimer localement le mouvement.

Pistes

- Recherche d'invariants plus robustes au mouvement que l'intensité...
- Estimation locale du mouvement, approches multi-échelle...

Notre objectif

Méthode robuste, facilement généralisable en 3D, complexité et paramétrage minimaux...

L'approche basée sur le flot optique

- Donnée : séquence d'images $I(t; x_1, x_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
- Inconnue : champ de vitesse $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Approche classique : équation du flot optique basée sur l'intensité (Horn–Schunk, 1981), (Lucas–Kanade, 1981)

$$\frac{d}{dt}I(t; \mathbf{x}) = \partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} I = 0, \quad (1)$$

⇒ Problème d'aperture : une équation, deux inconnues.

L'approche basée sur le flot optique

- Donnée : séquence d'images $I(t; x_1, x_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
- Inconnue : champ de vitesse $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Approche classique : équation du flot optique basée sur l'intensité (Horn–Schunk, 1981), (Lucas–Kanade, 1981)

$$\frac{d}{dt}I(t; \mathbf{x}) = \partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} I = 0, \quad (1)$$

⇒ Problème d'aperture : une équation, deux inconnues.

Approche alternative : intensité remplacée par phase multidimensionnelle ϕ (Fleet–Jepson, 1991)

$$\frac{d}{dt}\phi(t; \mathbf{x}) = \partial_t \phi + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \phi = 0, \quad (2)$$

⇒ Deux équations (ou plus), deux inconnues : plus de problème d'aperture. Notion de phase à préciser!!

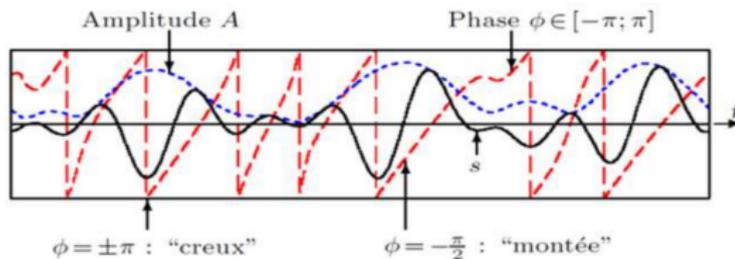
Notion de phase : le cas 1D

- Notion de phase en 1D : basée sur le signal analytique (Gabor, 1946).
- Signal analytique associé à $s(t)$:

$$s_A(t) = s(t) + j\mathcal{H}s(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 + \text{sgn}(\omega))\hat{s}(\omega)$$

Annulation des fréquences négatives.

- A : amplitude ou *énergie locale* du signal.
- ϕ : phase locale apportant une information sur la *structure locale*.



Extension multidimensionnelle?

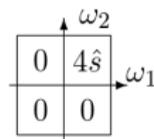
Une première tentative : le signal analytique de Hahn (Hahn, 1992)

Utilisation de la transformée de *Hilbert* partielle :

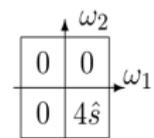
$$\mathcal{H}_\theta s(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} -j \operatorname{sgn}(\omega_1 \cos(\theta) + \omega_2 \sin(\theta)) \hat{s}(\omega)$$

Signal Analytique de Hahn :

$$s_{a_1}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_0 \mathcal{H}_{\frac{\pi}{2}} s(\mathbf{x}) + j \left(\mathcal{H}_0 s(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_{\frac{\pi}{2}} s(\mathbf{x}) \right),$$



$$s_{a_2}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_0 \mathcal{H}_{\frac{\pi}{2}} s(\mathbf{x}) + j \left(\mathcal{H}_0 s(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{\frac{\pi}{2}} s(\mathbf{x}) \right)$$



Analyse directionnelle en $\pm 45^\circ \rightarrow$: Deux modules A_1, A_2 et deux phases ϕ_1 et ϕ_2 .

Interprétation difficile!!!

Signal Quaternionique de Bülow :

$$s_Q(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) + j_1 \mathcal{H}_0 s(\mathbf{x}) + j_2 \mathcal{H}_{\frac{\pi}{2}} s(\mathbf{x}) + j_3 \mathcal{H}_0 \mathcal{H}_{\frac{\pi}{2}} s(\mathbf{x})$$

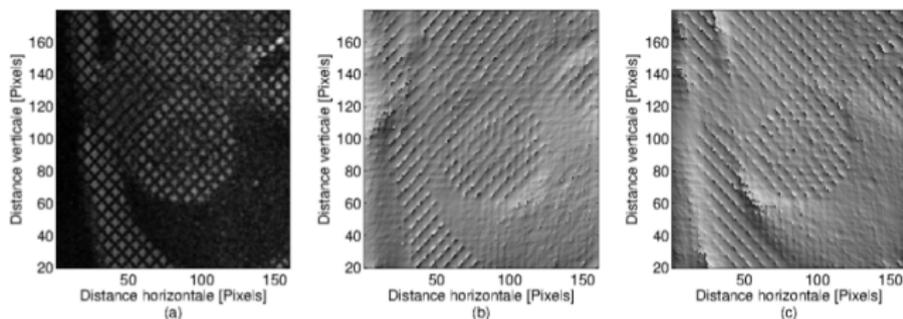
- La QFT \hat{s}_Q est nulle sur les trois quadrants négatifs.
- Ecriture polaire :

$$s_Q(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) e^{j_1 \phi_1(\mathbf{x}) + j_2 \phi_2(\mathbf{x}) + j_3 \phi_3(\mathbf{x})}$$

- $A(\mathbf{x})$: Amplitude.
- Théorème de décalage :

$$s(\mathbf{x}) \leftarrow s(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}) \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(\mathbf{x}) \leftarrow \phi_1(\mathbf{x}) - \tau_1 \omega_1 \\ \phi_2(\mathbf{x}) \leftarrow \phi_2(\mathbf{x}) - \tau_2 \omega_2. \end{cases}$$

Estimation du mouvement à partir de la phase (Basarab et al., 2009)



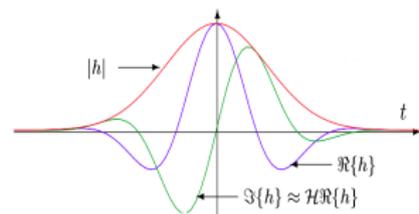
$$\partial_t \phi_1 + v_x \cdot \partial_x \phi_1 + v_y \cdot \partial_y \phi_1 = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t \phi_2 + v_x \cdot \partial_x \phi_2 + v_y \cdot \partial_y \phi_2 = 0. \quad (4)$$

→ : deux équations, deux inconnus → : Résolution locale (Block Matching) ⇔ Peut être obtenue naturellement avec des ondelettes.

Notre outil : les ondelettes quaternioniques

Point de départ : paire de Hilbert :
 $(\psi_h, \phi_h) \leftrightarrow (\psi_g, \phi_g)$



Exemples sur les filtres diagonaux :

→ Ondelettes analytiques (Kingsbury, 1999 et Selesnick, 2001)

$$\psi_1(x, y) = \psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y) + j(\psi_h(x)\psi_g(y) + \psi_g(x)\psi_h(y))$$

$$\psi_2(x, y) = \psi_h(x)\psi_h(y) + \psi_g(x)\psi_g(y) + j(\psi_h(x)\psi_g(y) + \psi_g(x)\psi_h(y))$$

→ Ondelettes quaternioniques (Baraniuk, 2004)

$$\psi_q(x, y) = \psi_h(x)\psi_h(y) - j_1\psi_g(x)\psi_h(y) - j_2\psi_h(x)\psi_g(y) + j_3\psi_g(x)\psi_g(y)$$

→ Ondelettes réelles :

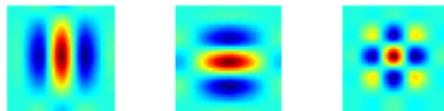


Figure: Contenu des ondelettes réelles

→ Ondelettes quaternioniques :

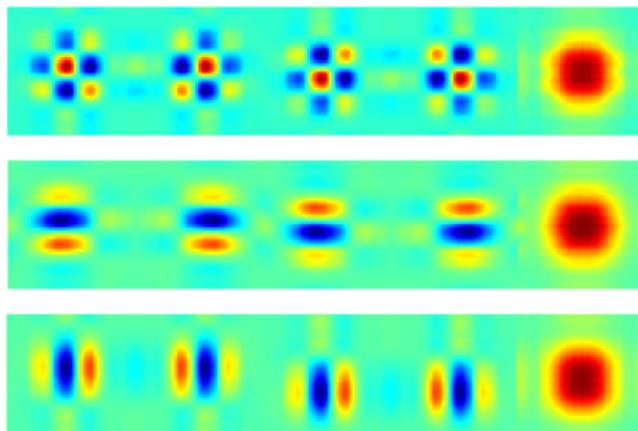


Figure: Contenu des ondelettes quaternioniques

Le principe (C.Bernard 2001, Y. Farouj et al. 2014)

Projection sur une base d'ondelettes $(\psi^i)_{i=1,\dots,N}$:

$$\langle \partial_t I, \psi_u^i \rangle + \langle v_1 \cdot \partial_{x_1} I, \psi_u^i \rangle + \langle v_2 \cdot \partial_{x_2} I, \psi_u^i \rangle = 0, \quad (5)$$

Le principe (C.Bernard 2001, Y. Farouj et al. 2014)

Projection sur une base d'ondelettes $(\psi^i)_{i=1,\dots,N}$:

$$\langle \partial_t I, \psi_u^i \rangle + \langle v_1 \cdot \partial_{x_1} I, \psi_u^i \rangle + \langle v_2 \cdot \partial_{x_2} I, \psi_u^i \rangle = 0, \quad (5)$$

Compacité des supports des ondelettes.

$$\langle \partial_{x_1} I, \psi_u^i \rangle v_1(\mathbf{u}) + \langle \partial_{x_2} I, \psi_u^i \rangle v_2(\mathbf{u}) = -\langle \partial_t I, \psi_u^i \rangle, \quad (6)$$

Système de 3 équations à deux inconnus ($A(\mathbf{u}) \mathbf{v}(\mathbf{u}) = B$)

→ **Le problème d'ouverture est contourné.**

Le principe (C.Bernard 2001, Y. Farouj et al. 2014)

Projection sur une base d'ondelettes $(\psi^i)_{i=1,\dots,N}$:

$$\langle \partial_t I, \psi_u^i \rangle + \langle v_1 \cdot \partial_{x_1} I, \psi_u^i \rangle + \langle v_2 \cdot \partial_{x_2} I, \psi_u^i \rangle = 0, \quad (5)$$

Compacité des supports des ondelettes.

$$\langle \partial_{x_1} I, \psi_u^i \rangle v_1(\mathbf{u}) + \langle \partial_{x_2} I, \psi_u^i \rangle v_2(\mathbf{u}) = -\langle \partial_t I, \psi_u^i \rangle, \quad (6)$$

Système de 3 équations à deux inconnus ($A(\mathbf{u}) \mathbf{v}(\mathbf{u}) = B$)

→ **Le problème d'ouverture est contourné.**

Remarques :

- Estimation multi-échelle naturelle.
- Inversion simple de système linéaire.
- Le choix de l'ondelette est crucial.
- L'approximation converge vers la solution exacte quand le support des ondelettes tend vers zero.

Une base parfaite :

- Information de Phase (Complexe, quaternionique),
- Invariance par translation (Complexe, quaternionique),
- Faible oscillations (quaternionique).

→ Toujours un système de 3 équation à résoudre dans l'espace des quaternions.

→ Moindres carrés.

→ Basses fréquences (Contre le bruits).

Résultats numériques

Algorithme :

Entrée: I_1 et I_2 .

Sortie: Champ de mouvement entre les deux images.

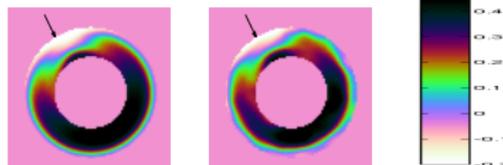
- Calculer les coefficients d'ondelettes de I_1 et I_2 à différentes échelles.
- Estimer $\mathbf{v}(u) = (A_j(u)^T A_j(u))^{-1} A_j(u)^T B_j(u)$, pour chaque pixel u .
- Interpoler avec les estimations des échelles précédentes.



Figure: Exemple d'estimation

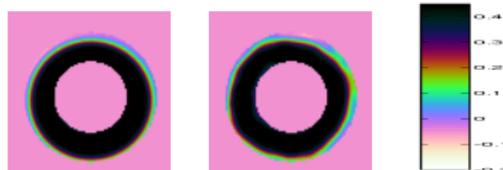
	AAE $\pm \sigma$ (in degrees)	AEPE $\pm \sigma$ (in pixels)	CPU time (s)
Proposed (P0)	2.82 \pm 1.69	0.065 \pm 0.044	59
PBDBM (P0)	3.49 \pm 2.20	0.082 \pm 0.059	109
Proposed (P1)	2.79 \pm 1.65	0.064 \pm 0.044	58
PBDBM (P1)	3.41 \pm 2.06	0.080 \pm 0.056	107

Comparaison : Estimation eulérienne



(a) Vérité P1

(b) Estimé



(d) Vérité P0

(e) Estimé

Tenseur de déformation radial

- 1 B. K. P. Horn and B. G. Schunck, "Determining optical flow." (1981).
- 2 D. J. Fleet and A. D. Jepson, "Computation of component image velocity from local phase information." (1990).
- 3 A. Basarab et al., "Analytic estimation of subsample spatial shift using the phases of multidimensional analytic signals." (2009).
- 4 C. P. Bernard, "Discrete wavelet analysis for fast optic flow computation." (2001).
- 5 N.G. Kingsbury, "The dual-tree complex wavelet transform: a new technique for shift invariance and directional filters" (1998).
- 6 Y. Farouj et al. "Cardiac Motion Analysis using wavelet projections from Tagged MR sequences." ICIP (2014).