

Invariance d'échelle multivariée et multidimensionnelle : Analyse multifractale de données non-homogènes application à l'étude de l'activité cérébrale humaine.

[•] **Contexte.** Le concept d'*invariance d'échelle* rompt avec la description traditionnelle d'un système, souvent construite sur l'identification d'une, ou quelques, échelles de temps ou d'espace, considérées comme jouant un rôle particulier dans la dynamique temporelle ou spatiale du système. L'intuition sous-jacente au concept d'invariance d'échelle suppose au contraire que tout un continuum d'échelles est impliqué dans la dynamique du système. Il ne s'agit donc plus d'identifier des échelles caractéristiques mais plutôt des mécanismes reliant ces échelles les unes aux autres. Ces mécanismes se matérialisent dans les exposants $\zeta(q)$ des lois de puissance, en fonction de l'échelle d'analyse a , que satisfont les moments d'ordre q des quantités multiéchelles $T_X(a, t)$ calculées sur le système étudié (i.e., des quantités qui dépendent à la fois du temps et de l'échelle, par exemple les coefficients d'ondelette) :

$$\sum_k |T_X(a, t = k)|^q \simeq c_q |a|^{\zeta(q)}. \quad (1)$$

Le concept d'invariance d'échelle a été utilisé avec succès dans un très grand nombre d'applications réelles de natures très différentes, allant des phénomènes naturels – physique (turbulence), géophysique (pluie, sismologie, . . .), médecine (rythmes du corps humains, activité cérébrale, génomique) – à l'activité humaine – communications (trafic internet), finance, géographie (répartition de population), arts (cf. [1, 2, 3] et les références qu'ils contiennent).

[•] **Limitations.** En dépit de ses succès massifs, l'analyse de l'invariance d'échelle se heurte actuellement à trois limites conceptuelles importantes :

- i) Les théories et méthodes restent essentiellement *univariées* (analyse indépendant d'un seul signal) ;
- ii) Les outils pratiques supposent a priori la *stationnarité* en temps (ou espace), en effet la somme en temps de l'équation (1) exclut la détection de changement au cours du temps ;
- iii) L'invariance d'échelle est associée à des *comportements localement singuliers simples* de types cusp, $|X(t+a) - X(t)| \simeq_{a \rightarrow 0} |a|^{h(t)}$, où $h(t)$ mesure la force de la singularité, qui sont trop réducteurs pour décrire les dynamiques complexes rencontrés dans les données d'aujourd'hui.

Les progrès technologiques et la baisse des coûts de production a conduit à un déploiement massif de capteurs dans les systèmes étudiés. Les données sont donc naturellement multivariées (de nombreux signaux en même temps) et/ou multidimensionnelles (images, champs). Les systèmes étudiés aujourd'hui sont de grandes tailles et complexes (activité cérébrale, télédétection par imagerie satellitaire, . . .) et les données enregistrées sont donc naturellement non stationnaires en temps et inhomogènes en espace, et associées à des dynamiques temporelles ou spatiales complexes, pour lesquels un même exposant $h(t)$ peut cacher de nombreuses réalités différentes.

[•] **Objectifs.** L'objectif de la thèse proposée est donc de contribuer aux fondements théoriques et pratiques de l'analyse d'invariance d'échelle, et de sa version la plus moderne, l'analyse multifractale en s'attaquant explicitement à ces trois limitations (multivarié, non stationnaire et inhomogène, dynamique complexe). Les développements théoriques, méthodologiques et pratiques seront mis en oeuvre sur l'analyse de données expérimentales issues d'applications d'importance réelle et actuelle : La caractérisation des propriétés d'invariance d'échelle dans les mécanismes dynamiques de l'activité cérébrale [3, 4, 5, 6] ainsi que dans des séquences/cubes d'images en imagerie médicale et en télédétection [7, 8, 9, 10].

Cette thèse a donc un positionnement scientifique très interdisciplinaire à l'interface entre les mathématiques, le traitement statistique du signal et de l'image, des développements théoriques et pratiques d'optimisation, et l'analyse de données réelles d'activité cérébrale, en collaboration avec des experts de ces disciplines et des applications.

[•] **Encadrement.** Cette thèse sera organisée sous forme d'une co-tutelle entre l'ENS de Lyon et l'Institut National Polytechnique de Toulouse, co-dirigée par :

- P. Abry, CNRS Directeur de Recherche, laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon (elle bénéficiera aussi du co-encadrement de N. Pustelnik, CNRS Chargée de Recherche),
- H. Wendt, CNRS Chargé de Recherche, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse.

Un stage de M2 préparatoire, sur un sujet proche, pourra être proposé.

Références

- [1] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard, “Bootstrap for empirical multifractal analysis,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 24, no. 4, pp. 38–48, 2007. [1](#)
- [2] S. Combrexelle, H. Wendt, N. Dobigeon, J.-Y. Tournet, S. McLaughlin, and P. Abry, “Bayesian estimation of the multifractality parameter for image texture using a Whittle approximation,” *IEEE T. Image Process.*, vol. 24, no. 8, pp. 2540–2551, 2015. [1](#)
- [3] P. Ciuciu, P. Abry, and B. J. He, “Interplay between functional connectivity and scale-free dynamics in intrinsic fMRI networks,” *Neuroimage*, vol. 95, pp. 248–263, 2014. [1](#)
- [4] D. L. Gilden, T. Thornton, and M. W. Mallon, “ $1/f$ noise in human cognition,” *Science*, vol. 267, no. 5205, pp. 1837–1839, 1995. [1](#)
- [5] G. Werner, “Fractals in the nervous system : conceptual implications for theoretical neuroscience,” *Front Physiol.*, vol. 1, 2010. [1](#)
- [6] B. J. He, “Scale-free brain activity : past, present, and future,” *Trends in cognitive sciences*, vol. 18, no. 9, pp. 480–487, 2014. [1](#)
- [7] R. Lopes and N. Betrouni, “Fractal and multifractal analysis : a review,” *Medical image analysis*, vol. 13, no. 4, pp. 634–649, 2009. [1](#)
- [8] F. Soares, F. Janela, M. Pereira, J. Seabra, and M. M. Freire, “3d lacunarity in multifractal analysis of breast tumor lesions in dynamic contrast-enhanced magnetic resonance imaging,” *IEEE T. Image Process.*, vol. 22, no. 11, pp. 4422–4435, 2013. [1](#)
- [9] W. Sun, G. Xu, P. Gong, and S. Liang, “Fractal analysis of remotely sensed images : A review of methods and applications,” *Int. J. Remote Sensing*, vol. 27, no. 22, pp. 4963–4990, 2006. [1](#)
- [10] J. Ilow and H. Leung, “Self-similar texture modeling using FARIMA processes with applications to satellite images,” *IEEE T. Image Process.*, vol. 10, no. 5, pp. 792–797, 2001. [1](#)