

# Correlation functions within the quantum separation of variables

**PhD supervisor** : Karol K. Kozłowski (karol.kozłowski@ens-lyon.fr)

## Keywords :

Mathematical physics, quantum integrable field theories, asymptotic analysis of multiple integrals.

## Résumé du projet :

Les facteurs de forme désignent la valeur moyenne d'un opérateur local calculée entre deux états propres du Hamiltonien. Ces objets constituent un outil de base permettant l'étude des fonctions de corrélations d'un modèle quantique mais restent incalculables pour une grande majorité de modèles ayant un intérêt pour la physique. Il existe cependant une classe de modèles en une dimension spatiale, les modèles intégrables quantiques, où il est possible de pousser le calcul des facteurs de forme jusqu'au bout. L'existence de ces solutions exactes est une source importante d'informations sur les fonctions de corrélations, que ce soit pour le modèle considéré ou pour des modèles plus généraux. En effet, la solution exacte permet de tester la pertinence de méthodes approximatives ou heuristiques utilisées dans des modèles plus généraux.

Il existe diverses techniques permettant de diagonaliser un Hamiltonien intégrable, la séparation des variables quantiques en particulier. Cette méthode permet notamment de calculer un bon nombre de facteurs de forme pour des régularisations intégrables sur réseau et en volume fini de théorie quantiques des champs en 1+1 dimension, telles que le modèle de Sinh-Gordon. Dans ce dernier cas, les facteurs de forme du modèle régularisé admettent une représentation en terme d'une intégrale  $N$ -uple portant sur les variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{a < b}^N \left\{ \sinh [\omega_1(\lambda_a - \lambda_b)] \sinh [\omega_2(\lambda_a - \lambda_b)] \right\} \cdot \prod_{a=1}^N \left\{ e^{-V(\lambda_a)} \right\} \cdot d^N \lambda .$$

$\omega_1, \omega_2$  sont reliées aux constantes de couplage du modèle et le "potentiel confinant"  $V$  contient toute l'information sur l'opérateur et les fonctions propres intervenant dans le facteur de forme. Enfin, le nombre d'intégrations  $N$  correspond au nombre de sites de la discrétisation.

Bien qu'explicite, ce type de représentation ne constitue qu'une réponse partielle. En effet, seuls les facteurs de forme de la théorie quantique en volume fini et dans le continu ont une importance physique. Ces quantités pourraient être atteintes en envoyant le nombre de sites  $N$  de la discrétisation vers l'infini au niveau du facteur de forme du modèle sur réseau. Sur le plan technique, cela demande d'extraire le comportement à grand  $N$  de l'intégrale  $N$ -uple ci-dessus. Certains aspects de cette analyse asymptotique ont été récemment développées par Borot, Guionnet et Kozłowski dans [1] et font appel à des outils d'analyse complexe (problèmes de Riemann–Hilbert) et de probabilités (concentration de la mesure, équations de boucles). Le but de la thèse sera de continuer le développement de la technique d'analyse asymptotique, en particulier en traitant le cas d'intégrales apparaissant directement dans le cadre de la méthode de séparation des variables quantiques. La thèse relèvera donc de l'étude de l'intégrale en présence de potentiels issus de modèles concrets, dont le modèle de Sinh-Gordon sur réseau proposé par Bytsko-Teschner [2]. Les principales difficultés relèveront alors du fait que les potentiels  $V$  issus des modèles intégrables quantiques admettent une dépendance en  $N$  complexe ce qui demande de modifier de manière non-triviale certaines étapes de l'analyse asymptotique développée dans [1]. En sus d'apporter un progrès considérable relatif à la compréhension des facteurs de forme dans les théories quantiques des champs en volume fini et de tester les conjectures de Lukyanov

[3] et de Negro-Smirnov [4], le succès du projet permettra de tester un bon nombre de conjectures portant sur les facteurs de formes d'opérateurs locaux de théories quantiques des champs intégrables en 1+1 dimensions et volume infini, ce-ci en prenant la limite de volume infini des résultats obtenus. Indépendamment des retombées en physique, le succès du projet permettra une avancée considérable dans le domaine de l'analyse asymptotique d'intégrales multiples. L'importance de cette avancée est, entre autres, due à la sur-abondance de représentations en termes d'intégrales multiples autant en physique qu'en mathématiques pures.

Les principaux outils qui seront manipulés dans cette thèse relèveront de l'analyse complexe, de la théorie des probabilités et du domaine des fonctions spéciales. J'insiste que la recherche menée au cours de cette thèse fera intervenir un nombre important de calculs.

## Outline of the project :

A Form factor corresponds to an expectation value of a local operator taken between two eigenstates of the Hamiltonian. These objects constitute a fundamental tool allowing one to study the correlation functions of a quantum model. However, the form factors cannot be computed explicitly in a closed form for a great majority of models having some interest to physics. Still, there exists a class of models in one spatial dimension, the quantum integrable models, where it is possible to push the calculation of form factors to the very end. The existence of these exact solutions constitutes an important source of information on the correlation functions, be it for the quantum integrable model of interest or for more general models. Indeed, the exact solution allows one to test the pertinence of the heuristic or approximate methods on which one builds so as to describe the correlation functions of a more general model.

There exist various techniques allowing one to diagonalise an integrable Hamiltonian, in particular the quantum separation of variables method. This method allows one to compute a large number of form factors for integrable lattice and finite volume regularisations of 1+1 dimensional quantum field theories, such as the Sinh-Gordon models. In this last case, the form factors of the regularised model can be expressed in terms of a  $N$ -fold integral over  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{a < b}^N \left\{ \sinh [\omega_1(\lambda_a - \lambda_b)] \sinh [\omega_2(\lambda_a - \lambda_b)] \right\} \cdot \prod_{a=1}^N \left\{ e^{-V(\lambda_a)} \right\} \cdot d^N \lambda .$$

$\omega_1, \omega_2$  are related to the model's coupling constants while the "confining potential"  $V$  contains all the information on the operator and on the eigenfunctions that are involved in the form factor. Finally, the number of integrations  $N$  corresponds to the number of sites of the discretisation.

Although explicit, this type of representation only constitutes a partial answer. Indeed, solely the form factors of the quantum theory in finite volume and in the continuum play a role in physics. These quantities can be obtained by sending to infinity the number of sites  $N$  in the discretised model's form factors. On the technical side, this means that one ought to extract the large- $N$  behaviour of the above  $N$ -fold integral. Some of the aspects of such an asymptotic analysis have been recently developed by Borot, Guionnet and Kozłowski in [1] and build on complex analysis (Riemann–Hilbert problems) and probabilistic (concentration of measure, loop equations) methods. This thesis would consist in pushing the asymptotic analysis further by treating cases of multiple integrals which are directly connected with the quantum separation of variables method. The thesis would consist in the study of the multiple integral in the presence of potentials appearing in concrete models such as the lattice Sinh-Gordon model proposed by Bytsko-Teschner [2]. The main difficulties would issue from the fact that the potentials  $V$  associated with quantum integrable models exhibit a rather intricate dependence on  $N$ . Treating this would then demand to modify quite non-trivially some of the steps

of the asymptotic analysis developed in [1]. On top of providing a considerable progress relatively to the understanding of form factors in finite volume quantum field theories in 1+1 dimensions as well as testing Lukyanov's [3] and Negro-Smirnov's [4] conjectures, the success of the project would also allow one to test a good deal of conjectures relative to form factors of local operators in integrable 1+1 dimensional quantum field theories in infinite volume, this by taking the infinite volume limit of the obtained result. Independently of the fallouts in physics, the success of the project would allow for an important progress in the field of asymptotic analysis of multiple integrals. The importance of such developments takes its roots, among other things, in the over-abundance of multiple integral representations as much in physics than mathematics.

The main tools that will be handled during the PhD thesis will belong to the field of complex analysis, special functions and probability theory. I insist that the research would also demand a great deal of calculations.

## Références

- [1] G. Borot, A. Guionnet, and K.K. Kozłowski, "*Asymptotic expansion of a partition function related to the sinh-model.*", math-ph : 1412.7721.
- [2] A.G. Bytsko and J. Teschner, "*Quantization of models with non-compact quantum group symmetry. Modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model.*", J. Phys. A **39** (2006), 12927–12982.
- [3] S. Lukyanov, "*Finite temperature expectation values of local fields in the sinh-Gordon model.*", Nucl. Phys. **B612** (2001), 391–412.
- [4] S. Negro and F. Smirnov, "*On one-point functions for sinh-Gordon model at finite temperature.*", Nucl. Phys. B **875** (2013), 166–185.