# Sujet de thèse
# Caractérisation de textures par analyse multifractale.

**Mots-clés :** Ondelettes, parcimonie, invariance d'échelle, multifractal, optimisation, segmentation, classification.


**Laboratoire :** Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon
46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07

**Responsables :** Patrice Abry & Nelly Pustelnik
email : patrice.abry@ens-lyon.fr, nelly.pustelnik@ens-lyon.fr
téléphone : 04 72 72 84 93 / 86 49
web : `http//perso.ens-lyon.fr/patrice.abry`
ou `http//perso.ens-lyon.fr/nelly.pustelnik`


**Contexte :** Les moyens technologiques actuels permettent de stocker de gigantesques volumes de données tels que des images acquises à une résolution très fine. Cette avancée majeure permet d'envisager des analyses beaucoup plus précises, en particulier des analyses qui s'intéresseraient au comportement au travers des échelles.

Durant ce stage nous travaillerons sur la notion d'invariance d'échelle d'un processus $(X(t))_{t\in\Omega}$ pouvant représenter un signal, une image ou un graphe. Formellement, l'invariance d'échelle se traduit par :

$$X(at) = a^{h(t)}X(t)$$

où $a$ désigne le facteur d'échelle et $h(t)$ la régularité locale. Des exemples de tels signaux et images sont présentés Figure 1.

Un résultat majeur de la littérature sur l'invariance d'échelle indique qu'il est possible d'estimer $h(t)$ par régression linéaire sur une quantité multiéchelle $S(a,t)$ associée à $X(t)$ telle que la valeur absolue des coefficients d'ondelettes. En effet,

$$S(a,t) \sim a^{h(t)} \quad \text{quand} \quad a \to 0$$

et, par conséquent, en effectuant une regression linéaire au travers des échelles, nous obtenons une estimée de la régularité locale

$$\widehat{h}(t) = \sum_a \omega_a \log S(a,t).$$

Pour améliorer les performances d'estimation on peut envisager d'intégrer des *a priori* sur les poids de régression et sur $h$ par une formulation variationnelle de la forme :

$$\underset{h,\omega}{\text{minimiser}} \; \|h(t) - \sum_a \omega_a \log S(a,t)\|_2^2 + R_h(h) + R_w(w) \tag{1}$$

où $w = (w_a)_a$ et où les termes de pénalisation $R_h$ et $R_w$ permettent d'incorporer des informations *a priori* sur la régularité locale et sur les poids de régression. Dans [1], nous avions incorporer des contraintes de type variation totale sur $h$ pour favoriser un comportement constant par morceaux de la régularité locale (tel que monofractal par morceaux illustré

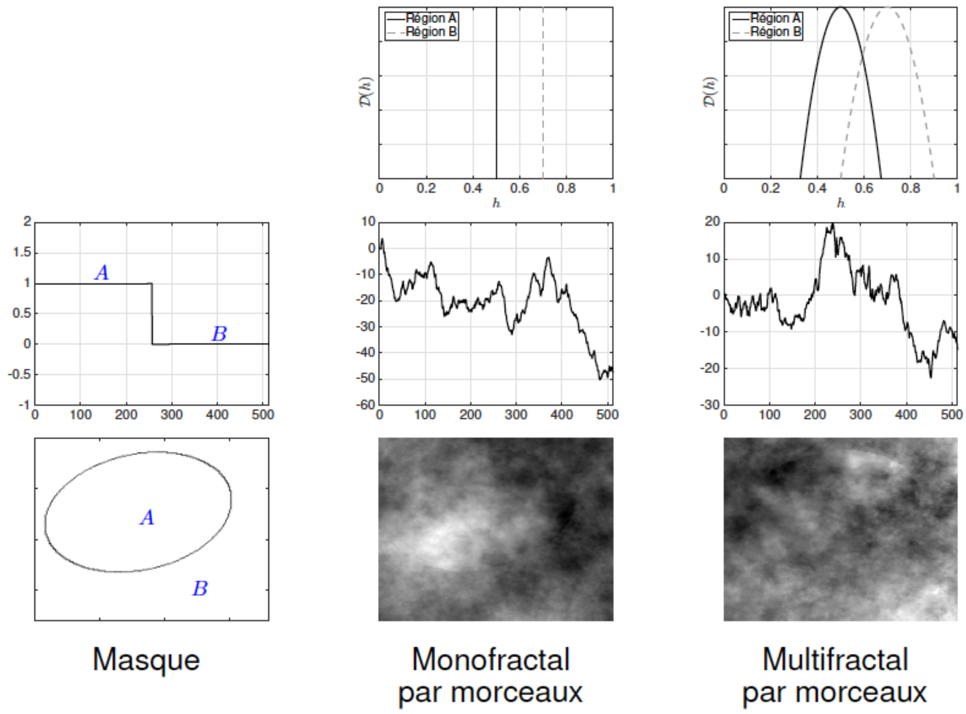


FIGURE 1 – Illustration de signaux $(X(t))_{t\in\Omega=\mathbb{R}}$ (2ème ligne) ou d'images $(X(t))_{t\in\Omega=\mathbb{R}^2}$ (3ème ligne) ayant une propriété d'invariance d'échelle, par exemple des signaux monofractal par morceaux, i.e. $h(t) = H_A$ ou $h(t) = H_B$ (2eme colonne) et des signaux multifractals par morceaux (chaque région est caractérisée par un ensemble de valeurs de $h$ rassemblée dans un spectre $\mathcal{D}$ illustré en haut à droite).

Figure 1) et des distances à des ensembles convexes pour contrôler le niveau de biais de l'estimateur.

L'équation (1) suggère que les performances d'estimation s'améliorent (i) en augmentant le nombre d'échelles sur laquelle la régression est effectuée (ce qui requiert de traiter un plus grand volume de données) et (ii) par résolution d'un problème d'optimisation. Il est donc indispensable de proposer des stratégies d'optimisation permettant de gérer à la fois un grand volume de données et des contraintes variées et pertinentes pour l'estimation.

**Axes de travail :** Autour de ce problème d'optimisation, plusieurs axes de recherches seront envisagés :

(i) Dans la configuration de signaux monofractals par morceaux considérée dans [1], il s'agira d'une part d'affiner les fonctions considérées dans le critère et de proposer des algorithmes rapides pour la résolution de ce critère convexe non-lisse. On pourra par exemple s'intéresser à l'extension du travail d'estimation à la volée proposé dans [2] ou à des travaux plus récents de la littérature des algorithmes proximaux.

(ii) Un deuxième axe de recherche consiste à s'écarter du modèle monofractal par morceaux pour aller vers un modèle multifractal par morceaux. La ré-écriture du problème de minimisation (1) devra être repensée pour obtenir à une formulation convexe.

(iii) On s'intéressera également à la question de la détection de zones multifractales dans une image par résolution d'un problème d'optimisation convexe non-lisse.

(iv) Les outils développés seront mis en oeuvre sur des données réelles issues de la physique ainsi que sur d'autres applications.

Le candidat devra avoir des connaissances en traitement du signal et des images ainsi qu'en optimisation. Il devra également maîtriser Matlab ou Python.

# Références

[1] N Pustelnik, H Wendt, P Abry, and N Dobigeon, "Local regularity, wavelet leaders and total variation based procedures for texture segmentation," IEEE Transactions on Computational Imaging, vol. 2, no. 4, pp. 468–479, Dec. 2016. (Lien arXiv).

[2] J Frecon, N Pustelnik, P Abry, and L Condat, "On-the-fly approximation of multivariate total variation minimization," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 64, no. 9, pp. 2355–2364, May 2016. (Lien arXiv).