

Série Sciences économiques et sociales

Épreuves communes d'admissibilité

Session 2023

SESSION 2023

COMPOSITION FRANÇAISE

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon

DURÉE : 6 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

« Cette illusion qu'on a – et qui est juste – d'être le seul à avoir écrit ce qu'on a écrit, que ce soit nul ou merveilleux. Et quand je lisais des critiques, la plupart du temps j'étais sensible au fait qu'on y disait que *ça ne ressemblait à rien*. C'est-à-dire que ça rejoignait la solitude initiale de l'auteur ».

Marguerite Duras, *Écrire*, Paris, Gallimard, 1993, p. 31.

En vous appuyant sur des exemples littéraires précis et variés, sans vous limiter à un genre, vous commenterez et discuterez ce propos.

SESSION 2023

COMPOSITION DE PHILOSOPHIE

Sujet commun : ENS Ulm - Lyon – Paris-Saclay

DURÉE : 6 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Qu'est-ce qui fait autorité ?

SESSION 2023

COMPOSITION D'HISTOIRE CONTEMPORAINE

Sujet commun : ENS Ulm - Lyon – Paris-Saclay

DURÉE : 6 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Croissance et contestations dans les sociétés d'Europe occidentale de 1945 à la fin des années 1970.

UHCE 353

SESSION 2023

SCIENCES SOCIALES

Sujet commun ENS Ulm, Lyon, Paris-Saclay, ENSAE/INSEE/ENSAI

Durée : 6 heures

Aucun document n'est autorisé.

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table et le poste de travail.

Le sujet comporte 10 pages

SUJET

Peut-on concilier justice sociale et défense de l'environnement ?

Document 1 – L'influence du niveau de vie sur les pratiques environnementales des ménages

Influence du niveau de vie sur les pratiques des ménages

Odds ratio des niveaux de vie les plus élevés, comparés aux moins élevés (référence = 1)

Transports	
Recours à la marche, au vélo ou aux transports en commun	
Jamais pour faire ses courses	4,2
Jamais pour se rendre sur son lieu de travail / d'études	2,2
Distances parcourues avec la voiture/moto	
20 000 km ou plus parcourus annuellement en véhicule motorisé	5,3
Plus de 1200 km parcourus en véhicule motorisé à l'occasion des dernières vacances	3,5
Covoiturage	
Partage d'un véhicule pour se rendre sur son lieu de travail ou d'études : rarement ou jamais	2,4
Déplacements en avion (hors professionnel)	
Au moins une fois au cours de l'année	2,2
Plus de 20 heures de trajets aériens au cours de l'année passée	9,0
Logement	
Consommation en eau	
Pas ou peu attention à la consommation d'eau au sein du foyer	3,0
Température de chauffage dans la pièce principale du logement	
Faible vigilance à l'égard du réglage de la température*	2,1
Température de chauffage supérieure à 19°C*	2,5
Economies d'énergie	
Lavage systématique du linge à basse température (30°C) pour faire des économies d'énergie*	1,8
Consommation	
Achat de produits biologiques	
Achat systématique de viande ou de poisson issus d'élevage biologiques	2,8
Achat fréquent d'œufs ou de lait issus de l'agriculture biologique	1,8
Consommation de viande	
Consommation de viande plus de cinq fois par semaine	6,4
Consentement à payer davantage pour protéger l'environnement	
Pour acheter des fruits et légumes bio	2,4
Pour recourir uniquement à des énergies renouvelables*	2,0
Opinion	
Pas le sentiment d'agir autant que possible pour protéger l'environnement	1,9

Champ : France hors Mayotte, personnes âgées de 18 ans ou plus.

Lecture : toutes choses égales par ailleurs, les enquêtés dont le niveau de vie est le plus élevé ont trois fois plus de chances que ceux dont le niveau de vie est plus faible de répondre qu'ils font peu ou pas attention à la consommation d'eau au sein de leur foyer. Le tableau présente de manière thématique une sélection de résultats de l'enquête considérés comme les plus significatifs du fait de l'ampleur des décalages mesurés entre les réponses données par les 10% de l'échantillon dont le niveau de vie est le plus faible et les 10% dont le niveau de vie est le plus élevé. Les ratios en italique portent sur les 1^{er} et 5^e quintiles. Les valeurs indiquent la propension qu'ont les ménages les plus aisés à choisir davantage telle ou telle modalité, comparativement aux ménages les plus modestes (valeur de référence = 1).

Source : INSEE Références (Éric Pautard) « Les acteurs économiques et l'environnement », édition 2017.

* Pour ces items, le champ concerne la France métropolitaine.

Document 2 – Pratiques environnementales selon le niveau d'études

Influence du niveau d'études sur les pratiques des ménages

Odds ratio des plus diplômés, comparés aux moins diplômés (référence = 1)

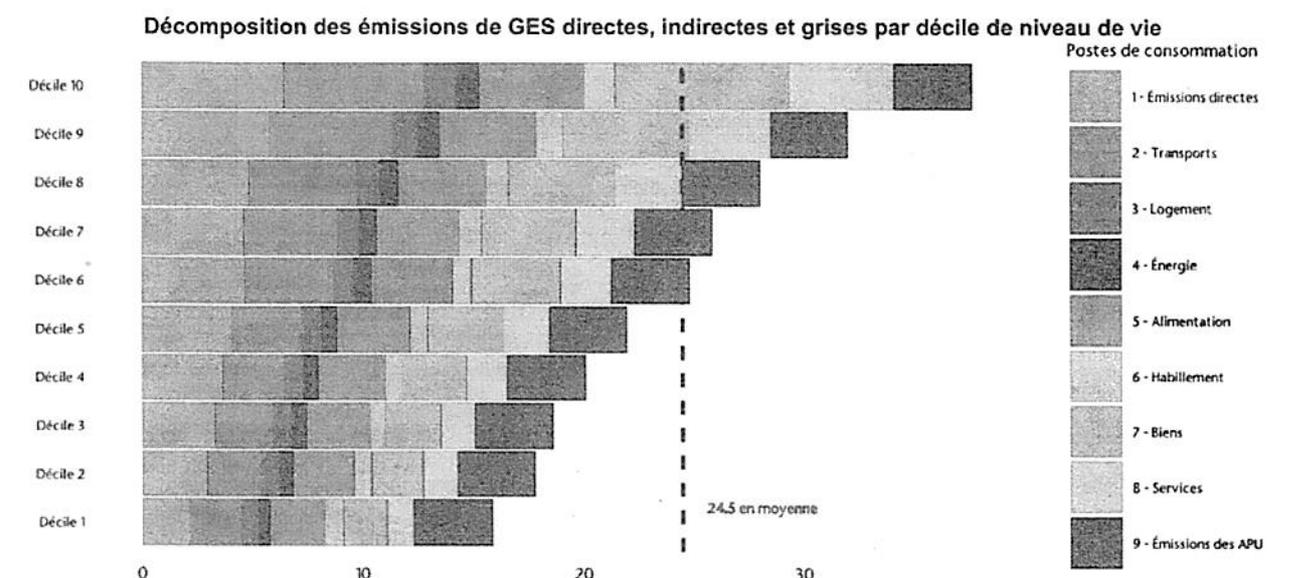
Transports	
Pas d'utilisation d'un véhicule motorisé	
Pour faire ses courses	1,6
Pour se rendre sur son lieu de travail / d'études	1,9
Temps de parcours pour se rendre sur son lieu de travail ou d'études	
40 minutes ou plus	2,3
Covoiturage	
Fréquent partage de véhicule en dehors du cadre familial pour effectuer de longs trajets	2,0
Fréquent partage d'un véhicule pour se rendre sur son lieu de travail ou d'études	1,8
Autres modes de transport	
Déplacement à vélo au moins une fois par mois	1,8
Déplacement en avion (hors professionnel) au cours de l'année passée	2,6
Logement	
Consommation en eau	
Peu ou pas attention à la consommation d'eau au sein du foyer	1,6
Consommation	
Critères de vigilance systémique lors des achats alimentaires	
Provenance géographique des produits alimentaires	5,5
Choix de produits de saison	3,4
Manière dont sont produits les aliments (conditions d'élevage, pratiques agricoles raisonnées)	2,4
Le prix n'est pas le critère qui compte le plus lors des courses alimentaires	1,9
Prise en considération des labels environnementaux lors des achats	
Produits de bricolage / jardinage (peintures, amendements pour les sols)	1,8
Achat de produits biologiques	
Achat systématique de fruits et légumes issus d'élevages biologiques	2,9
Achat systématique de viande ou de poisson issus d'élevages biologiques	1,8
Consentement à payer davantage pour protéger l'environnement	
Pour acheter des fruits et légumes bio	1,6
Opinion	
Ne ressent pas les conséquences du changement climatique dans sa vie quotidienne	
	1,5

Champ : France hors Mayotte, personnes âgées de 18 ans ou plus.

Lecture : toutes choses égales par ailleurs, les enquêtés les plus diplômés ont 5,5 fois plus de chances que les moins diplômés de faire systématiquement attention à la provenance géographique des produits alimentaires lorsqu'ils en achètent. Note : le tableau présente de manière thématique une sélection de résultats de l'enquête considérés comme les plus significatifs du fait de l'ampleur des décalages mesurés entre les réponses données par les enquêtés selon leur niveau d'étude. Les valeurs indiquent la propension qu'ont les plus diplômés à choisir davantage telle ou telle modalité, comparativement aux enquêtés peu diplômés (valeur de référence = 1).

Source : INSEE Références (Éric Pautard) « Les acteurs économiques et l'environnement », édition 2017.

Document 3 – Emissions de gaz à effet de serre par décile de niveau de vie



Lecture : L'empreinte carbone telle que définie dans ce rapport, est l'ensemble des émissions induites par la consommation d'un ménage pendant une année, et qui peut se décomposer en trois principales composantes. Les émissions directes (ED) sont celles issues de la combustion de produits fossiles au moment de la consommation finale. Par exemple, la consommation en essence directe d'un ménage lorsqu'il utilise sa voiture et produit ainsi du CO₂. Les émissions indirectes (EI) sont celles qui sont associées au processus de production du bien ou service final (le diagramme les décompose pour plusieurs postes de consommation : transports, logement, habillement, etc.). Par exemple si la fabrication d'une voiture et son importation en France depuis l'Allemagne ont aussi supposé l'émission de 10 tonnes de CO₂ en Allemagne et 1 tonne de CO₂ pour son importation, on décomptera 11 tonnes de CO₂ au titre des émissions indirectes en plus du CO₂ dégagé par les émissions directes. Pour être le plus exhaustif possible, ces émissions indirectes ont été ici aussi agrégées pour chaque poste (transports, énergie, alimentation, etc.) aux émissions grises (EG) : c'est à dire aux émissions induites par l'ensemble des activités en amont de la chaîne de valeur (et avant même importation du bien). Pour poursuivre avec l'exemple de la voiture, le diagramme ci-dessus tient donc aussi compte des 2 tonnes de CO₂ éventuellement émises aux Pays Bas en raison la fabrication d'une pièce mécanique élaborée à part avant l'assemblage d'une voiture importée depuis l'Allemagne.

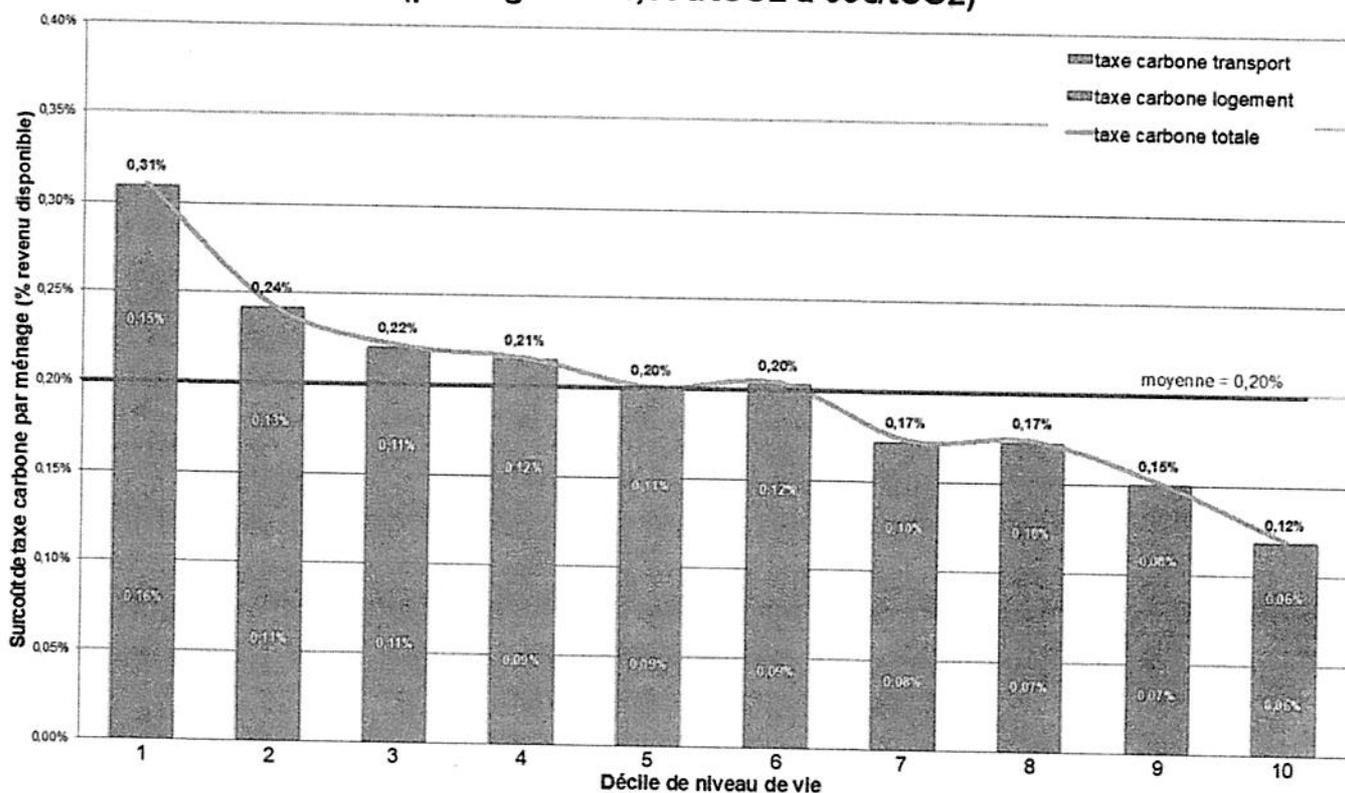
Cette logique de calcul s'applique pour tous les postes de consommation tels que précisés dans le diagramme. À ces émissions associées à la consommation directe des ménages, le diagramme y ajoute enfin en neuvième position celles induites par la consommation finale des Administrations Publiques (APU), qui produisent des services et des biens non-marchands à destination des consommateurs et qui représentent au final une partie significative de la demande finale. Ces émissions APU sont considérées dans ce diagramme comme équitablement réparties dans la population dans la mesure où il est difficile de discriminer les niveaux de consommation de ces biens et services en fonction des caractéristiques des ménages.

Au final, l'empreinte carbone totale (ECT) s'écrit : $ECT = EI + EG + ED + EAPU$.

Source : ADEME, Paul Malliet, Ruben Haalebos, Emeric Nicolas, « La fiscalité carbone aux frontières : ses impacts redistributifs sur le revenu des ménages français. », 2019 (d'après INSEE 2011, Exiobase 3).

Document 4 – Projections anticipant les effets de la fiscalité carbone

Graphique : Impact de la hausse de taxe carbone selon les déciles de niveau de vie, en 2020, avec réponses comportementales (passage de 44,60€/tCO₂ à 55€/tCO₂)



Lecture : L'impact de la taxe carbone est ici ramené au revenu disponible des ménages. Une élévation de la taxe carbone à 55 euros par tonnes de CO₂ émise représenterait, pour les ménages du premier décile, un surcoût équivalent à 0,31% de leurs revenus disponibles.

Source : Audrey Berry, Eloi Laurent, « Taxe carbone, le retour à quelles conditions ? », Sciences Po OFCE Working paper, n° 6/2019

Document 5 – Les politiques publiques environnementales et les enjeux de redistribution

« *Lump-sum* : quels seraient les effets des transferts directs aux ménages ?

Dernièrement, le schéma qui semblerait le plus simple serait celui d'un *lump-sum*, un chèque équivalent versé à chaque habitant d'un foyer. La même somme versée à tous les ménages compenserait les ménages pauvres qui payent un montant faible de taxe carbone représentant néanmoins une part importante de leur budget tandis que les ménages les plus riches seraient moins compensés.

Verser des revenus supplémentaires génère un effet rebond, c'est-à-dire que la consommation et les émissions des ménages ré-augmenteraient. Néanmoins, les études empiriques montrent qu'il y a une asymétrie dans les réactions des ménages entre une hausse des prix et une hausse de revenus : le prélèvement de 100€ de taxe carbone réduit plus les émissions du ménage que ne les ré-augmenteront un chèque du même montant. L'efficacité globale de la stratégie de réduction des émissions ne serait pas compromise puisque l'augmentation des émissions des ménages pauvres, du fait de la compensation, ne représente qu'une faible proportion des émissions des plus riches.

L'efficacité du *lump-sum* est fondée sur une compensation équivalente des ménages par niveau de revenu mais sans prendre en compte la structure de consommation. En France, deux tiers des individus du premier décile ne possèdent pas de voiture et paient peu de taxe carbone quand le tiers restant est la population la plus taxée puisqu'il dédie environ 12% de ses revenus à l'achat de carburant. Les inégalités face aux politiques environnementales ne sont donc pas que verticales – liées aux revenus – mais aussi horizontales – liées à d'autres caractéristiques socio-économiques. Globalement, les ruraux sont plus touchés car plus dépendants de la voiture individuelle sans alternatives en transports en commun alors même que les emplois se regroupent dans les villes et parce qu'ils possèdent des logements individuels plus vastes et moins bien isolés. Une solution pourrait être de lier un transfert *lump-sum* avec des subventions à la rénovation énergétique ciblées vers certaines zones.

Source : *Emilien Ravigné, « Quels impacts distributifs des politiques environnementales ? », Regards croisés sur l'économie, 2020/1 (n° 26), p. 198-207*

Document 6 – Les déterminants sociaux du vote écologiste

« Initialement, les partis verts ont été présentés comme se tenant à l'écart des clivages traditionnels. Dès lors que les partis verts mettent l'accent sur des « valeurs qui pourraient être importantes pour la survie de l'humanité au lieu de promouvoir le bien-être de groupes particuliers », le vote vert était surtout appréhendé comme un vote transcendant le *vieux* « clivage de classe ». Aussi, les premières études ont donné à voir l'électorat vert comme un groupe très hétérogène en termes de caractéristiques socio-démographiques.

Cependant, des recherches plus systématiques sur le profil sociologique des électeurs verts ont remis en question cette interprétation originale. Plusieurs scientifiques ont montré que les électeurs verts partageaient des caractéristiques sociologiques spécifiques. La première variable sociologique signalée est l'âge : les partis verts représentaient avant tout les aspirations des jeunes générations. Deuxièmement, le genre est apparu comme une variable déterminante : les femmes avaient tendance à être plus favorables au mouvement vert, dès lors qu'elles accordaient plus d'importance aux questions de qualité de vie – protection sociale, environnement, paix, etc. Un troisième élément, et pas le moins important, se réfère au capital scolaire des électeurs verts - une variable qui a un effet important sur les attitudes des électeurs concernant les conséquences du processus de mondialisation.

Adoptant une perspective plus « structurelle », certains chercheurs ont mis en évidence que les partis verts et leurs électeurs sont ancrés dans les clivages traditionnels – le clivage socio-économique entre la gauche et la droite, le clivage philosophique et le clivage rural-urbain. Pour ce qui a trait au clivage socio-économique classique entre la gauche et la droite, les partis verts se sont positionnés en faveur de plus de justice sociale et d'égalité. Dès lors, les électeurs verts devraient adopter une position à gauche sur cet axe. En ce qui concerne l'*ancien* clivage philosophique, qui peut être compris aujourd'hui comme une opposition entre les valeurs progressistes et conservatrices, les partis verts sont clairement positionnés du côté progressiste. En conséquence, nous devrions trouver parmi les électeurs verts un soutien clair pour des questions telles que l'égalité des sexes, le mariage homosexuel, l'avortement, etc. Les électeurs verts proviendraient principalement de la classe moyenne. Les partis verts obtiendraient singulièrement un fort soutien parmi les fonctionnaires, car ils partagent une vision d'intervention de l'État de gauche sur les questions économiques. Dolezal (2010), qui s'est penché sur les citoyens non actifs professionnellement, a montré que le soutien pour les verts est plus élevé chez les étudiants et les hommes/femmes au foyer, et plus faible chez les retraités. En ce qui concerne les autres clivages, les électeurs verts seraient proportionnellement moins nombreux chez les croyants et pratiquants catholiques et protestants. *A contrario*, leur pénétration serait plus forte dans les grandes villes, dès lors que le mouvement vert est né dans les grandes aires industrielles, sécularisées et multiculturelles.

Si ces études empiriques ont révélé l'influence des variables socio-structurelles sur le vote vert, les explications basées sur les thématiques soulevées restent pertinentes. L'environnementalisme politique est ancré dans différents types de valeurs, qui sont liées à la fois aux clivages « anciens » et « nouveaux ».

Source : D'après Caroline Close, Pascal Delwit, « Les partis verts européens à l'aune du plafond de verre électoral. Résultats électoraux et profils des électeurs des partis verts en Europe », *Les Cahiers du Cevipol*, 2018/1 (N° 1), p. 3-56.

Document 7 - Une alliance entre agriculteurs et militants écologistes dans une mobilisation contre l'usage des pesticides

Dans les années 2000, plusieurs agriculteurs tentent de faire reconnaître par leur organisme de Sécurité sociale un lien entre leurs problèmes de santé et l'exposition aux pesticides. Les agriculteurs qui se lancent dans de tels parcours de reconnaissance font, pour la plupart, face à d'importantes difficultés. Certains agriculteurs cherchent donc du soutien auprès de la Fédération nationale des syndicats d'exploitants agricoles (FNSEA). Cependant, un tel soutien n'a rien d'évident. Tenante d'un syndicalisme gestionnaire, fortement impliquée dans la promotion de modes de production agronomiques plus intensifs et plus utilisateurs de produits issus de la chimie de synthèse, la FNSEA répond défavorablement aux demandes que lui adressent certains agriculteurs. Dans ce contexte, les contempteurs du productivisme agricole deviennent un recours pour des agriculteurs déçus par leurs représentants traditionnels.

En 2011, une poignée de familles d'agriculteurs ont fondé l'association Phyto-victimes, qui cherche à faciliter la reconnaissance légale du préjudice subi par les travailleurs des champs intoxiqués et à obtenir un contrôle plus strict des produits phytosanitaires. L'émergence de cette action collective repose sur le rôle décisif joué par une petite constellation d'acteurs proches de l'écologie politique, engagés dans une critique virulente envers le productivisme agricole et les méfaits sanitaires et environnementaux des pesticides, et plus particulièrement sur l'investissement d'une association écologiste alors assez récemment créée, le Mouvement pour la défense et le respect des générations futures (MDRGF), rebaptisée GF (Génération futures) en 2010. Or ce sont des acteurs avec lesquels les agriculteurs ont moins l'habitude d'interagir. De plus, les agriculteurs qui créent Phyto-victimes sont pour la plupart des exploitants pratiquant une agriculture intensive et *a priori* peu réceptifs à la critique du productivisme. Il va en résulter une alliance improbable et problématique, les acteurs coalisés occupant des positions relativement éloignées dans l'« espace des mouvements sociaux » et cette alliance va être mise à l'épreuve.

La constitution d'un collectif de victimes impose un travail de cadrage de l'identité victimaire par lequel sont définies les responsabilités en jeu dans leurs souffrances. Lors de la création de Phyto-victimes, GF envisage ces responsabilités de manière large : les travailleurs agricoles victimes des pesticides sont alors vus comme les victimes d'un « système » constitué de l'ensemble des acteurs qui promeuvent le recours aux pesticides de synthèse dans l'agriculture conventionnelle. GF critique les firmes de la phytopharmacie, bien sûr, mais également le ministère de l'Agriculture, qui autorise la mise sur le marché des pesticides sur la base d'une évaluation de risque que l'association estime biaisée. Elle dénonce aussi le peu d'empressement de la Mutualité sociale agricole à reconnaître les maladies professionnelles induites par ces produits et l'engagement de la FNSEA dans la défense de l'agriculture intensive. Tous les membres fondateurs de Phyto-victimes ont eu des expériences qu'ils jugent déplaisantes avec l'une ou l'autre de ces différentes institutions et ils sont, en conséquence, particulièrement réceptifs aux critiques que les responsables de GF leur adressent.

Cependant, les prises de position publiques de l'association Phyto-victimes vont largement épargner la FNSEA. Ses responsables jugent en effet que des critiques trop virulentes contre le syndicat majoritaire leur feraient courir le risque de se « couper du milieu agricole ». Ils sont convaincus que leur pouvoir d'influence repose en partie sur leur capacité à parler à – et au nom de – la profession agricole dans son ensemble, sans mettre en cause les institutions qui en

constituent les piliers. (...) Le mouvement des Phyto-victimes suit une ligne de crête pour maintenir une position centrale entre « le monde agricole » et les associations écologistes anti-pesticides. Si GF n'a pas réussi à aligner complètement le cadrage du problème des pesticides au sein de Phyto-victimes avec le sien, les deux associations trouvent un terrain d'entente dans la dénonciation des firmes qui fabriquent les pesticides. Cela permet de rendre moins saillantes les critiques adressées aux autres piliers politiques et institutionnels de l'agriculture intensive, qui apparaissent comme manipulés par les producteurs de pesticides. La recherche et la désignation d'un coupable principal – les firmes phytopharmaceutiques – constituent un indispensable ciment de ce type d'alliances contre nature, la condition de leur résistance à l'épreuve du temps.

Source : D'après Jean-Noël Jouzel, Giovanni Prete, « Mettre en mouvement les agriculteurs victimes des pesticides. Émergence et évolution d'une coalition improbable », Politix. 2015.

Document 8 – Sentiment de relégation, inégalités sociales et mobilisations au nom de la justice environnementale

« La mobilisation est, en ce sens, un signal fort d'*empowerment*. Elle permet, par exemple, à des résidentes d'un ancien quartier marseillais de relégation sociale et encore très stigmatisé (la Cayolle), de progressivement faire valoir leur attachement à la colline, classée en coeur de parc national, sur fond d'histoire commune, constitutive d'un lien social fort. Elle joue également un rôle essentiel dans la définition, médiatisation et mise en agenda des problèmes et risques environnementaux et sanitaires. Elle est, plus généralement, l'expression d'un sentiment d'injustice, qui s'accroît lorsque l'effort semble aussi mal réparti que les maux. En témoigne la mobilisation des petits pêcheurs professionnels de La Ciotat et des plaisanciers en 2015-2016 contre la dérogation octroyée à Altéo¹ (cependant sous condition de dépollution progressive) pour poursuivre ses émissions de rejets pollués au coeur du Parc national des Calanques. Ce sentiment d'injustice s'amplifie également lorsque les mesures prises pour cesser la pollution en coeur de parc aggravent celles des territoires non protégés. Ainsi des résidents de Gardanne et Bouc Bel Air dénoncent-ils le fait que la dépollution progressive des rejets en mer effectués par l'usine Altéo ait pour conséquence d'aggraver les rejets à terre sur le dépôt de Mange-Garri (commune de Bouc Bel Air), hors des périmètres du Parc national des Calanques. Ces habitants se disent considérés comme des « citoyens de seconde zone », une expression qui traduit certes le sentiment d'être sur un territoire victime d'inégalités inhérentes aux politiques de zonage, mais, plus encore, celui d'être sacrifiés aux intérêts des grandes puissances mondiales de l'économie et de la finance.

Ce dernier sentiment d'injustice semble s'enraciner dans les contours d'un « nouveau conflit de classe » entre citoyens ordinaires et la très grande bourgeoisie qu'incarnent ces puissances, une « lutte des classes » aux dimensions géopolitiques. Il se fonde sur la conviction partagée d'une asymétrie de pouvoir et d'une injustice liée à la dégradation de la nature et de la qualité de vie, de la santé, pour les générations présentes et futures. Au regard des préjudices définis comme incommensurables, les revendications de réparation du milieu de vie prennent alors le pas sur les demandes de compensation financières. (...)

¹ Altéo est une entreprise basée à Gardanne et qui traite des minerais comme la bauxite et les transforme en alumine et en différents composants chimiques utilisés ensuite dans la fabrication de céramiques ou d'abrasifs.

Ces types de mouvements pour la justice environnementale, au regard de la manière dont ils cadrent les problèmes d'environnement, mettent en visibilité ces différentes inégalités. Mais ils en occultent également d'autres, selon l'échelle à laquelle le problème est défini et l'expérience qui sous-tend cette définition. Ainsi dans les protestations collectives à l'encontre d'Altéo sont peu dénoncées les inégalités géopolitiques liées au commerce de la bauxite provenant des mines de Boké en Guinée, où s'ajoutent aux poussières liées à l'exploitation, la captation de la rente et des terres par les compagnies minières ou encore la privation de ressources naturelles (plantes, eau) et de l'emploi pour les habitants. Les revendications, locales, portées par les riverains de l'usine et du dépôt ainsi que par les usagers des Calanques et des ONG excluent quasiment la question des conditions de travail et de vie des ouvriers et intérimaires d'Altéo-Gardanne, peu enclins quant à eux à manifester, jusqu'à aujourd'hui, si ce n'est en soutien à l'usine. Ainsi si les situations d'injustice environnementale se lisent le plus souvent à travers les mobilisations qui en portent le nom, l'absence de mobilisation peut également constituer le signal faible des inégalités les plus fortes, d'incapacité à dire l'injustice dont on est victime, ou encore à dire les pathologies liées au travail, telle l'exposition aux pesticides pour les salariés agricoles. »

Source : Valérie Deldrève, « La fabrique des inégalités environnementales en France. Approches sociologiques qualitatives », Revue de l'OFCE, 2020/1 (165), p. 117-144.

SESSION 2023

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les exercices et problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

On pourra utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

Il est demandé de **soigneusement** numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, en les encadrant ou en les soulignant. Il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.

EXERCICES.

I. Soient α et β deux réels. On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les premiers termes $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, et par les relations $x_{n+1} = \frac{y_n + \alpha}{2}$ et $y_{n+1} = \frac{x_n + \beta}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit ensuite pour tout entier n , $v_n = x_n - \frac{2\alpha + \beta}{3}$ et $w_n = y_n - \frac{\alpha + 2\beta}{3}$.

(1) (1a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

(1b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n^2 + w_n^2 = \frac{v_0^2 + w_0^2}{4^n}$.

(1c) En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

(1d) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

II. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(2) (2a) Quel est le domaine de définition de f ?

(2b) Que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs (x, y) et $(1, 1)$ de \mathbb{R}^2 ?

(2c) Soit $a > 0$. Calculer $f(a, a)$ et justifier sans calcul supplémentaire que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = 0$.

(3) On suppose que $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, où $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

(3a) Exprimer $f(x, y)$ en fonction de r et θ .

(3b) Que remarque-t-on ? Interpréter.

PROBLÈME A.

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, « être malade » ou « être donneur compatible »). On fixe $q \in]0, 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée. Le résultat d'une analyse est dit **positif** si la propriété est présente, **négatif** si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.

A.1. Recherche de toutes les personnes possédant la propriété.

On veut trouver **toutes** les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

Protocole **A**

On mélange le sang des n personnes et l'on fait une analyse de ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête. S'il est positif, on analyse individuellement le sang de chacune des n personnes.

On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole **A** pour n personnes.

- (4) (4a) Pourquoi s'arrête-t-on si le premier résultat est négatif?
(4b) Quelles valeurs peut prendre A_n ?
(4c) Déterminer la loi de A_n .
(4d) Montrer que l'espérance de A_n est $E[A_n] = n + 1 - nq^n$.
- (5) On considère un entier k tel que $1 \leq k < n$. Calculer la probabilité conditionnelle que les k premières personnes testées soient toutes négatives, sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

Protocole **B**

On fait un test pour chacune des n personnes.

- (6) (6a) À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole **A** qu'avec le protocole **B**? On exprimera le résultat en fonction de n .
(6b) Calculer la limite à droite, en 0, de $x \mapsto x^x$.
(6c) Justifier que, pour n assez grand, le protocole **B** est préférable au protocole **A**.

A.2. Recherche d'une personne possédant la propriété.

On veut dorénavant trouver **une** personne possédant la propriété recherchée, au sein d'une population que l'on suppose infinie.

Protocole **C**

On teste les personnes une par une, jusqu'à en trouver une qui possède la propriété.

On note C la variable aléatoire qui indique le rang de la première personne possédant la propriété, c'est-à-dire que $C = j$ si la j -ème personne est la première à posséder la propriété. Ainsi, C compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole **C**. On rappelle que q est la probabilité de ne pas posséder la propriété recherchée et on note $p = 1 - q$ la probabilité de la posséder.

- (7) (7a) Donner la loi de C .
(7b) Donner, sans justification, l'espérance de C .

On va maintenant procéder par regroupement. On fixe un entier $n \geq 2$, qui désignera la taille des groupes. Ainsi, le premier groupe contiendra les n premières personnes, le second groupe contiendra les n suivantes, et ainsi de suite.

Protocole **D**

On mélange le sang des n personnes du premier groupe et on le teste. Si le résultat est négatif, on procède de façon similaire avec le groupe suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un test positif. On teste ensuite une par une les personnes du groupe dont le test est positif, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété.

On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc.

(8) Soit k un entier strictement positif.

(8a) Exprimer l'évènement $\{G > k\}$ en fonction de la variable aléatoire C , introduite en préambule de la question (7).

(8b) Calculer la probabilité $P(G > k)$.

(8c) Reconnaître la loi de G .

On note X la variable aléatoire représentant le numéro de la première personne à avoir un test positif au sein de son groupe. Par exemple, si c'est la cinquième personne du second groupe qui donne le premier test positif, cela signifie que $G = 2$ et $X = 5$.

(9) (9a) Quelles valeurs peut prendre X ?

(9b) Pour $k \geq 1$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X = i \mid G = k)$.

(9c) Calculer la limite de cette quantité lorsque $q \rightarrow 1$.

(9d) Montrer que X est indépendante de G .

(9e) Montrer que $E[X] = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}$.

(10) On note D le nombre de tests effectués avec le protocole **D**.

(10a) Exprimer, en fonction des valeurs prises par G et par X , l'évènement $\{D = 3\}$.

(10b) Trouver une relation entre D , G et X .

(10c) Soit un entier $j \geq 1$. Montrer que $P(D = j) = \sum_{k=1}^{j-1} P(C = (k-1)n + j - k)$.

(11)(11a) Calculer $E[D]$.

(11b) À n fixé, calculer la limite du quotient $\frac{E[D]}{E[C]}$ lorsque $q \rightarrow 1$. Interpréter ce résultat.

PROBLÈME B.

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

(12)(12a) Justifier que la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(12b) Montrer que f est paire.

(12c) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée f' .

(12d) Montrer que f est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$.

(12e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(13)(13a) Soit un réel $M > 0$. En effectuant le changement de variable $u = e^x$, montrer que

$$\int_0^M f(x) dx = \int_1^{e^M} \frac{1}{1+u^2} du.$$

(13b) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

(13c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq f'(x) \leq 1$.

(13d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

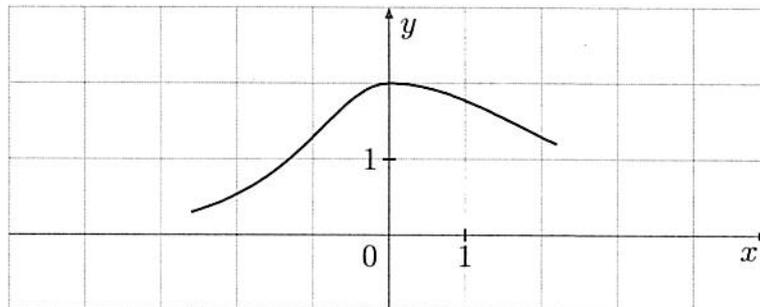
Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , strictement positive, strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, et telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy$ converge.

(14)(14a) Justifier que g admet une limite en $-\infty$ et une limite en $+\infty$.

(14b) Montrer que ces limites sont toutes les deux nulles.

(14c) Montrer qu'il existe exactement deux réels x_- et x_+ tels que $g(x_-) = g(x_+) = \frac{g(0)}{2}$.

(14d) On a tracé ci-dessous, en repère orthonormé, une partie du graphe d'une fonction g qui vérifie les hypothèses. Recopier ce graphe et le compléter en faisant apparaître toutes les informations obtenues en question (14). On placera en particulier x_- et x_+ .



Dans la suite de l'énoncé, on suppose de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(x) - g(y)| \leq |x - y|.$$

Pour $A > 0$ et $L > 0$, on définit les fonctions $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(t) = g(t) + \sin(At) \quad \text{et} \quad F(t) = \frac{1}{2L} \int_{t-L}^{t+L} h(s) ds, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

(15)(15a) Montrer que $F(t) - g(t) = \frac{1}{2L} \int_{t-L}^{t+L} (g(s) - g(t)) ds + \frac{\cos(A(t-L)) - \cos(A(t+L))}{2LA}$.

(15b) Montrer que $\int_{t-L}^{t+L} |s - t| ds = L^2$.

(15c) En déduire que $|F(t) - g(t)| \leq \frac{L}{2} + \frac{1}{LA}$.

(15d) Comment choisir $L > 0$ pour que $\frac{L}{2} + \frac{1}{LA}$ soit le plus petit possible, A étant fixé?

Tournez la page S.V.P.

(16) On suppose dans cette question que $A = 2\pi$ et $L = 1$.

(16a) Exprimer F en fonction de g .

(16b) Recopier le tracé complet de la fonction g fait en (14d) et dessiner également le graphe de la fonction h .

PROBLÈME C.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(17)(17a) Déterminer le noyau de l'application linéaire représentée par A .

(17b) Déterminer les valeurs propres de A .

(17c) La matrice A est-elle diagonalisable?

On considère un entier $n \geq 1$ et l'application linéaire $\varphi : \mathbf{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_{2n-1} + x_{2n+1}, x_{2n}).$$

(18)(18a) Quelle est la matrice de φ dans la base canonique?

(18b) Déterminer une base du noyau de φ .

(18c) Déterminer le rang de φ .

(18d) A-t-on $\text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi) = \mathbf{R}^{2n+1}$?

(19) Soient a et b deux réels. En étudiant la partie imaginaire de $e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib})$, montrer que

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \cos(b) \sin(a).$$

(20) Soit $k \in \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$ et $\theta = \frac{k\pi}{2n + 2}$. On considère le vecteur

$$v_\theta = (\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), \dots, \sin((2n + 1)\theta)).$$

(20a) Pour $j \in \{1, \dots, 2n + 1\}$, montrer que la j -ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est

$$\sin((j - 1)\theta) + \sin((j + 1)\theta).$$

(20b) Montrer que v_θ est un vecteur propre de φ , associé à la valeur propre $2 \cos(\theta)$.

(21)(21a) La matrice de φ est-elle diagonalisable?

(21b) Donner un équivalent de la plus petite valeur propre de φ en valeur absolue, lorsque n tend vers l'infini.