

**Série Sciences Économiques et Sociales**

**Épreuves communes d'admissibilité**

**Session 2024**

SESSION 2024

---

**COMPOSITION FRANÇAISE**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.*

« La littérature joue d'étranges tours : plus le sujet est pauvre, plus l'écrivain est roi. »

Bernard Frank, *Portraits et aphorismes*, 2002.

En vous appuyant sur des textes littéraires précis et variés, sans vous limiter à un genre, vous discuterez ce propos.

**UHC 455**

**SESSION 2024**

---

**COMPOSITION DE PHILOSOPHIE**

---

Sujet commun : ENS Ulm - Lyon – Paris-Saclay

**DURÉE : 6 heures**

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

**La valeur de la nature**

**UHC 452**

SESSION 2024

---

**COMPOSITION D'HISTOIRE CONTEMPORAINE**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

Vivre en dictature dans le monde 1919-1990.

UHCE 453

**SESSION 2024**

---

**SCIENCES SOCIALES**

---

Sujet commun ENS Ulm, Lyon, Paris-Saclay, ENSAE/INSEE/ENSAI

**Durée : 6 heures**

*Aucun document n'est autorisé.*

*Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table et le poste de travail.*

Le sujet comporte 11 pages

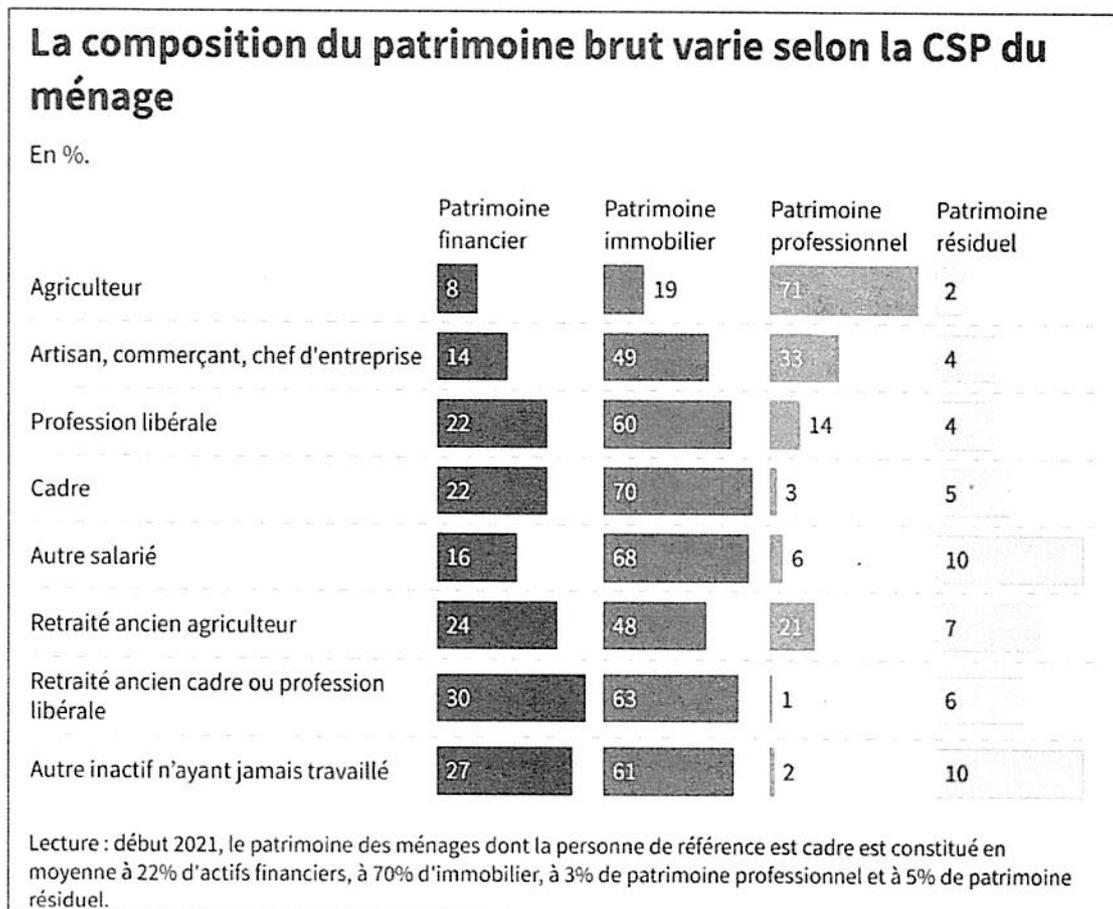
**SUJET**

**Les transferts intergénérationnels de capitaux :**

**des accélérateurs des inégalités ?**

**Tournez la page S.V.P.**

**Document n° 1 : Composition du patrimoine selon la catégorie socio-professionnelle du ménage**



Le « patrimoine résiduel » tel que défini par l'INSEE se compose de la valeur des biens durables (voiture, équipement de la maison, etc.), ainsi que les « bijoux, œuvres d'art et autres objets de valeur ».

**Source :** Dossier Statistiques, INSEE, Enquête « Histoire de vie et Patrimoine des Français », 2020-21.

**Document n° 2 : Répartition des héritages selon leur montant et les caractéristiques des héritiers (en %)**

<i>Tranches des montants de l'héritage reçu</i>	Moins de 8 000 €	De 8 000 € à moins de 30 000 €	De 30 000 € à moins de 100 000 €	100 000 € ou plus	Ensemble
<b>Tranches d'âge des bénéficiaires au moment de la réception de la transmission</b>					
Moins de 30 ans	53,3	23,5	14,8	8,4	100,0
De 30 à 39 ans	46,2	23,6	19,6	10,6	100,0
De 40 à 49 ans	42,5	25,9	20,7	10,9	100,0
De 50 à 59 ans	30,4	30,4	23,8	15,5	100,0
60 ans ou plus	25,0	30,3	26,6	18,1	100,0
<b>Personne à l'origine de l'héritage</b>					
Grands-parents paternels	55,6	23,5	12,6	8,3	100,0
Grands-parents maternels	57,9	24,7	10,2	7,2	100,0
Père	37,5	27,9	21,3	13,3	100,0
Mère	34,8	29,5	22,1	13,6	100,0
Les deux parents	34,7	26,5	24,2	14,6	100,0
Enfants	ns	ns	ns	ns	100,0
Autres membres de la famille	45,5	23,4	20,4	10,7	100,0
Autres personnes hors famille (amis, ...)	ns	ns	ns	ns	100,0
<b>Catégorie socioprofessionnelle actuelle ou antérieure des héritiers</b>					
Agriculteur, artisan, commerçant, chef d'entreprise	22,8	26,8	24,9	25,5	100,0
Profession libérale	21,0	23,0	28,7	27,3	100,0
Cadre	31,5	28,2	23,1	17,2	100,0
Profession intermédiaire	39,8	28,4	21,3	10,5	100,0
Employé	49,7	24,8	18,8	6,7	100,0
Ouvrier qualifié	47,4	24,9	22,2	ns	100,0
Ouvrier non qualifié	45,7	30,8	ns	ns	100,0
Retraité ancien agriculteur, ancien artisan, commerçant, chef d'entreprise	37,5	26,8	22,4	13,3	100,0
Retraité ancien cadre ou prof. libérale	25,1	24,7	27,7	22,5	100,0
Retraité ancien salarié	40,3	29,4	19,5	10,8	100,0
Autre inactif	55,4	17,1	15,4	12,1	100,0
<b>Tranches de patrimoine net du ménage des héritiers</b>					
Moins de 10 000 €	66,3	20,8	9,8	ns	100,0
De 10 000 € à moins de 115 000 €	48,7	30,8	15,7	4,8	100,0
De 115 000 € à moins de 275 000 €	41,2	29,3	20,1	9,4	100,0
De 275 000 € à moins de 500 000 €	34,5	28,1	24,3	13,1	100,0
500 000 € ou plus	20,3	22,4	28,9	28,4	100,0
<b>Ensemble</b>	<b>38,7</b>	<b>27,1</b>	<b>21,2</b>	<b>12,9</b>	<b>100,0</b>

Champ : héritages reçus par les ménages ordinaires résidant en France (hors Mayotte). Sont exclus les héritages dont le montant est inconnu (14 % des cas). Note : en cas d'héritage reçu par les deux personnes du couple de référence, l'âge retenu est celui de la personne de référence du ménage. Lorsque pour un calcul il y a moins de 20 réponses, les résultats ne sont pas significatifs. Ils sont donc remplacés par le symbole ns.

Source : Insee, Enquête « Histoire de vie et Patrimoine », 2017-2018.

### Document n° 3 : Mesurer la mobilité intergénérationnelle

[...] Considérées sur l'ensemble des XIXe et XXe siècles, les inégalités patrimoniales n'ont jamais été aussi fortes aujourd'hui qu'à la veille de la Première Guerre mondiale, même si elles sont loin d'avoir retrouvé leur niveau d'avant 1914. En effet, à la période de la Belle Epoque, la part possédée par le centile le plus riche est d'environ 45 % aux États-Unis et de près de 65 % en Europe. Dans les années 1970, elle atteint son niveau le plus bas aussi bien en Europe (20 %) qu'aux États-Unis (29 %) pour remonter aujourd'hui respectivement à 24 % et 33 %. [...]

[La] « patrimonialisation » des sociétés occidentales se traduit par une forte augmentation des montants transmis, surtout après 1980. Cette augmentation a été bien supérieure au rythme de la croissance économique, en particulier en France où les montants transmis ont doublé en pourcentage du PIB sur les trente dernières années. En outre, le poids de l'héritage dans l'accumulation patrimoniale aurait également augmenté dans notre pays depuis 1980, alors qu'il aurait plutôt diminué aux États-Unis où la création de richesses dans les nouvelles technologies a été plus importante. Ce poids accru du passé dans l'économie et la constitution des patrimoines dans notre pays a suscité de nombreuses inquiétudes, certains évoquant un peu rapidement « le retour à une France balzacienne » loin d'un idéal « méritocratique ». À la nuance près que le poids de l'héritage demeure moins élevé qu'avant 1914 et que l'État-providence était quasi-inexistant à cette époque. Dans ce contexte, la question de la transmission intergénérationnelle des inégalités de richesse se pose avec acuité, question étroitement liée aux diverses méthodes pour la mesurer. [...]

Pour mesurer statistiquement la mobilité intergénérationnelle, deux indicateurs sont en général utilisés : l'élasticité intergénérationnelle (EIG) qui, dans le cas du patrimoine, mesure les différences de richesse relative entre enfants par rapport aux différences de richesse relative entre parents (si la richesse des parents était 2 fois la moyenne de leur génération, celle des enfants sera de  $100 \cdot \text{EIG}$  supérieure à la moyenne de la leur) ; la corrélation intergénérationnelle qui mesure la proximité entre les deux distributions de fortune, des enfants et des parents (0 : indépendance totale, 1 : corrélation parfaite). Plus ces deux indicateurs sont élevés, plus la mobilité intergénérationnelle des patrimoines est faible et inversement.

Les premières études en matière économique menées essentiellement aux États-Unis ont surtout concerné les revenus et tendaient à montrer une faible corrélation entre le statut des enfants et celui de leurs parents<sup>1</sup>. [...] Ces mesures anciennes de la mobilité intergénérationnelle des revenus et des salaires, corrigées de certains biais, sont aujourd'hui revues à la hausse. Mais la mobilité intergénérationnelle des caractéristiques économiques peut concerner aussi d'autres variables, comme la consommation et l'éducation.

---

<sup>1</sup> [Les auteurs du texte citent] Peter M. Blau et Otis Dudley Duncan, *The American Occupational Structure*, New York, Wiley, 1967 ; ainsi que Samuel Bowles et Herbert Gintis, 2002, « The Inheritance of Inequality », *Journal of Economic Perspectives*, vol. 16, n° 3, Summer 2002, pp. 3-30.

En France, l'immobilité intergénérationnelle des fortunes a, comme ailleurs, été très peu étudiée. À partir de données historiques concernant le XIXe siècle et le début du XXe siècle, nous nous sommes attachés à la mesure de la transmission intergénérationnelle des inégalités patrimoniales. En prenant comme point de départ un corpus de défunts comprenant 1 347 individus issus de l'enquête « 3 000 familles » pour le département de Loire-Inférieure, nous avons établi – grâce à un travail de reconstitution généalogique – un échantillon de 314 « binômes » père-enfant. À chacun des membres de ces binômes, nous avons associé le montant de leur patrimoine au décès qui a été recueilli dans les archives de l'administration de l'Enregistrement<sup>2</sup>. L'étude économétrique de la transmission des inégalités aboutit à la conclusion d'une immobilité intergénérationnelle des fortunes entre 1800 et 1938 relativement importante (corrélation de 0,37) : une fortune égale à 2 fois la fortune moyenne dans la génération des pères se traduit en moyenne pour les enfants par une fortune au décès qui représente 1,45 fois la fortune moyenne de leur propre génération (EIG = 0,45). La « régression vers la moyenne » existe mais elle se situe à mi-chemin entre une société mobile et une société totalement égalitaire où chaque génération repart à zéro ne bénéficiant d'aucun avantage par rapport à la génération qui l'a précédée. Si l'héritage et les donations apparaissent comme un facteur important pour expliquer la mobilité intergénérationnelle des patrimoines, il est loin d'être le seul. L'éducation, les revenus, les préférences [vis-à-vis de l'épargne], et plus généralement l'environnement culturel des enfants ont un rôle très important dans le processus d'accumulation du patrimoine.

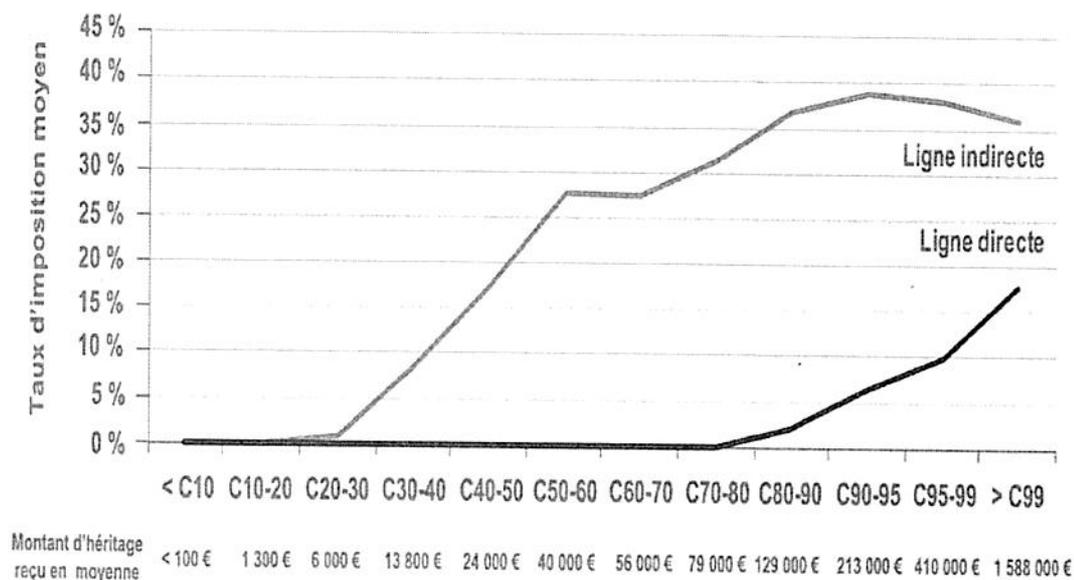
**Source** : Extraits de Luc Arrondel & Cyril Grange, « Transmettre des valeurs entre générations : tel père tel fils ? », *Revue de l'OFCE*, 2018/2, n°156, pp. 77 à 95.

---

<sup>2</sup> Les archives de l'Enregistrement offrent une information étendue sur les diverses opérations financières qui concernent un individu tout au long de son existence. Administration fiscale chargée de taxer les mutations, l'Enregistrement permet donc de recueillir les informations relatives aux successions (montant et composition), dont des données successorales où l'on compare la fortune léguée par les parents et celle laissée par les enfants.

**Document n° 4 : Taux d'imposition effectif selon centiles**

**Graphique 11 – Taux d'imposition effectif par montant d'héritage reçu et selon la ligne de transmission (législation 2012)**



Lecture : les héritages situés entre le 90<sup>e</sup> et le 95<sup>e</sup> centiles des héritages et reçus par des héritiers autres que les enfants sont taxés à 37,5 % en moyenne.

Source : France Stratégie, d'après l'enquête Patrimoine 2010 (voir document de travail)

**Source :** France Stratégie, « Peut-on éviter une société d'héritiers ? », *La note d'analyse*, n°51, Janvier 2017, d'après l'enquête Patrimoine 2010 (INSEE).

## **Document n° 5 : Des stratégies de reproduction sociale familiales**

En 1992, la boulangère Marcelle Pilon part à la retraite et organise sa succession. Veuve depuis plus de quinze ans, elle décide de donner la boulangerie et la grande maison attenante à la boutique à son fils Pierre, qui a quarante-trois ans à l'époque et travaille déjà avec elle en tant que pâtissier. Mais Pierre a trois sœurs. Dans le cadre de la donation-partage réalisée chez le notaire, les trois filles de Marcelle reçoivent quelques biens immobiliers et terrains, dont la valeur n'atteint néanmoins pas celle de la part de Pierre. Pour que le partage soit égalitaire, en accord avec les principes du code civil, l'acte notarié prévoit que Pierre fournira gratuitement à deux de ses sœurs, qui vivent à proximité, du pain et des viennoiseries. Cet accord formalisé sera scrupuleusement suivi par Pierre et ses sœurs, pendant dix années, sous le contrôle de leur mère qui comptabilise baguettes, croissants et chocolatinés.

Sur le papier, l'arrangement a l'air précis et équitable. Pourtant, l'enquête ethnographique révèle une importante omission, connue de toutes et tous. Délibérément, quelque chose n'a pas été compté. Dans les années 1960, les parents Pilon avaient acheté un fonds de pâtisserie pour leur fils Pierre, alors âgé de quatorze ans. C'est ce fonds de pâtisserie que Pierre adjoint à la boulangerie de ses parents pour en faire la boulangerie-pâtisserie dont il devient le seul patron. La valeur d'un fonds de commerce en milieu rural n'est pas négligeable : entre 50 000 et 100 000 euros. Pourtant, celui-ci n'a jamais été intégré dans les partages patrimoniaux officiels. Lors des entretiens, Marcelle Pilon et ses enfants justifient cette irrégularité par le fait que Pierre se serait sacrifié en reprenant l'entreprise familiale. De plus, il n'a pas réalisé d'études supérieures, contrairement à ses sœurs. Marcelle Pilon parvient même à chiffrer le coût des études de ses filles, en mentionnant la vente d'un moulin pour les financer dans les années 1960.

Tout n'est pas apaisé, cependant. Lorsque Sibylle pose explicitement aux sœurs la question de l'équité des partages successoraux, elles évoquent d'abord ces justifications, avant de mentionner plusieurs éléments qui les remettent en cause. Il s'avère qu'elles aussi ont travaillé dans la boutique de leurs parents et qu'elles l'ont toujours fait gratuitement, tandis que leur frère a rapidement été salarié, puis a touché le chiffre d'affaires lié à l'activité de pâtisserie. Par ailleurs, la vente du moulin n'a pas suffi. L'une des trois filles a arrêté ses études à l'âge de dix-sept ans, tandis que les deux autres les ont en partie financées par des bourses, tout en continuant à aider gratuitement leurs parents à la boulangerie. Les sœurs ont des griefs, et, pourtant, elles n'en ont pas fait part devant le notaire. Comme l'explique Roseline : « Ce qu'on ne voulait pas, Micheline, Monique et moi, toutes les trois... on ne voulait surtout pas se fâcher ! »

La bonne entente familiale est ici préservée au nom du maintien de l'entreprise familiale, qui prime sur les considérations de justice entre frère et sœurs. Si les filles Pilon n'ont pas contesté le fait d'être lésées, c'est que l'histoire de leur frère peut être racontée de deux manières différentes : Pierre a eu la « chance » d'être avantagé par leurs parents, ou bien il s'est « sacrifié » en reprenant la boulangerie-pâtisserie familiale.

Les stratégies familiales de reproduction sont collectives. Dans le cas de la famille Pilon, s'il est important pour les sœurs de Pierre que la boulangerie reste dans la famille, c'est qu'elle constitue un ressort important de notabilité pour l'ensemble du groupe de parenté au niveau local. À l'échelle collective, il existe une cohérence entre le déroulement de la succession, le maintien au village de la plupart des membres de la famille et l'investissement différencié des parents dans la scolarité de leur fils et de leurs filles (Monique est devenue directrice de l'école, Roseline conseillère municipale) : ces différents éléments ont permis le cumul de positions de notabilité qui assurent le maintien du statut social de la famille dans l'espace local. La notion de *stratégie familiale* permet de rendre compte de cette cohérence : « Il y a stratégie à partir du moment où le joueur, au lieu de prendre une décision à chaque coup, anticipe les coups à venir (cohérence dans le temps), les répartit selon une règle (cohérence dans l'espace) et suit par conséquent une ligne de conduite. Peu importe qu'il la suive en pleine conscience ou non : l'essentiel est la cohérence. La stratégie est donc ce qu'il faut supposer à la base des pratiques dès que celles-ci s'orientent objectivement vers une même fin »<sup>3</sup>. Les arrangements économiques familiaux que nous observons sont le résultat de *stratégies* au sens où ils sont le fruit de choix cohérents effectués à la fois en fonction de paris sur l'avenir et de dispositions sociales, de contraintes et de ressources particulières.

Dispositions, contraintes et ressources varient selon les classes sociales et sont en partie partagées par les membres de la famille. Mais, au sein même d'une famille, femmes et hommes bénéficient de dispositions et de ressources différenciées. Dans le cas de la famille Pilon, les sœurs apprennent qu'il est normal de travailler gratuitement et de manière désintéressée en aidant à la boutique au gré des besoins de l'entreprise familiale ; elles apprennent aussi qu'il est nécessaire d'accumuler du capital scolaire pour occuper un emploi salarié. Le frère apprend qu'il est normal que son travail soit valorisé et rémunéré ; il profite des bénéfices de l'indépendance et de la rentabilisation d'un capital économique très tôt hérité, en étant rapidement intéressé aux résultats de l'entreprise. La famille produit ainsi des individus genrés, qui vont être amenés à jouer des rôles différenciés et hiérarchisés dans ces stratégies familiales de reproduction.

**Source :** Extraits de Céline Bessière et Sibylle Gollac, *Le genre du capital. Comment la famille reproduit les inégalités*, Paris, La Découverte, 2020.

---

<sup>3</sup> François Héran, *Le Bourgeois de Séville. Terre et parenté en Andalousie*, Presses universitaires de France, Paris, 1990.

**Document n°6. La dynamique des patrimoines : l'effet de l'héritage sur la probabilité d'achat de la résidence principale**

Tableau 1 – Déterminants de l'achat de la résidence principale (coefficients exponentialisés)

	Modèle sans hétérogénéité (complémentaire log log) Coef.	Modèle avec hétérogénéité (split model) Coef.
<b>Dons et héritages reçus par la pers. de réf. (PR)</b>		
Don reçu PR	1,62 (***)	1,81 (***)
Héritage reçu PR	1,50 (***)	1,53 (***)
<b>Parents PR</b>		
Au moins un parent PR en vie	1,16 (***)	1,19 (***)
Parents PR en vie et prop de leur resid principale	1,24 (***)	1,23 (***)
Parents PR en vie et détenteurs de valeurs mobilières	1,01 (ns)	1,00 (ns)
Parents PR en vie et détenteurs d'assurance vie	1,05 (ns)	1,01 (ns)
<b>Aides reçues par PR</b>		
Don ponctuel	1,07 (ns)	1,07 (ns)
Versements réguliers	0,96 (ns)	0,93 (ns)
Prêt	1,04 (ns)	1,05 (ns)
Mise disposition d'un logement ou paiement d'un loyer	0,78 (**)	0,76 (***)
PR actif en emploi l'année précédente	1,34 (***)	1,35 (***)
<b>Ménage créateur/repreneur d'entreprise</b>		
Don reçu PR × Ménage créateur/repreneur d'entreprise	2,00 (***)	2,12 (***)
Héritage reçu PR × Ménage créateur/repreneur d'entreprise	0,76 (**)	0,82 (ns)
	0,81 (ns)	1,07 (ns)
<b>Diplôme PR</b>		
Sans diplôme	Réf.	Réf.
CEP	1,12 (**)	1,14 (***)
CAP,BEP	1,46 (***)	1,50 (***)
Brevet des collèges	1,46 (***)	1,47 (***)
Bac pro ou technique	1,95 (***)	1,94 (***)
Bac général	1,46 (***)	1,45 (***)
Bac + 2	1,89 (***)	1,93 (***)
Bac + 3 et plus	1,50 (***)	1,51 (***)
<b>Couple et conjoint</b>		
En couple	1,86 (***)	1,87 (***)
En couple avec patrimoine au départ	1,25 (***)	1,29 (***)
<b>Dons et héritages reçus par le conjoint (CJ)</b>		
Don reçu CJ	1,41 (***)	1,64 (***)
Héritage reçu CJ	1,38 (***)	1,42 (***)
Conjoint actif en emploi l'année précédente	1,23 (***)	1,23 (***)
<b>Parents CJ</b>		
Au moins un parent CJ en vie	1,36 (***)	1,39 (***)
Parents CJ en vie, non détenteurs de valeurs mobilières et prop de leur resid principale	1,16 (***)	1,19 (***)
Parents CJ en vie, non prop de leur resid principale et détenteurs de valeurs mobilières	0,89 (ns)	0,86 (ns)
Parents CJ en vie et prop de leur resid principale et détenteurs de valeurs mobilières	1,00 (ns)	1,03 (ns)
Parents CJ en vie et détenteurs d'assurance vie	1,02 (ns)	1,00 (ns)
<b>Aides reçues par CJ</b>		
Don ponctuel	0,99 (ns)	0,96 (ns)
Versements réguliers	1,02 (ns)	0,93 (ns)
Prêt	0,96 (ns)	0,95 (ns)
Mise disposition d'un logement ou paiement d'un loyer	0,85 (ns)	0,86 (ns)
Ménage a eu son 1er enfant au cours des 2 années précédentes	1,27 (***)	1,25 (***)
Ménage a eu un enfant (pas le 1er) au cours des 2 années précédentes	1,40 (***)	1,39 (***)
Pourcentage de ménages qui ne souhaitent pas acheter leur résidence principale		4,16 % (***)

Enquête Patrimoine 2009-2010, personnes âgées de moins de 80 ans. Les coefficients sont exponentialisés.

Lecture : Dans le modèle sans hétérogénéité, la probabilité instantanée d'achat est multipliée par 1,62 si la personne de référence a reçu une donation. Elle est multipliée par 1,81 dans le modèle avec hétérogénéité.

Lecture : Le « split model », modèle avec hétérogénéité – contrairement au *log log*, modèle sans hétérogénéité –, permet d'estimer la part de ménages qui souhaiteraient acquérir leur résidence principale. Pour les ménages dont la personne de référence (PR) est âgée de 15 à 80 ans, cette part est ici estimée à un peu moins de 96 % : ainsi, en France, près de 4,16% des ménages souhaite, héritage ou non, rester locataire. Dans le modèle avec hétérogénéité, la probabilité qu'un ménage, désireux d'acheter sa résidence principale et dont la personne de référence a hérité, l'achète est 1,53 fois supérieure à celle d'un ménage n'ayant pas hérité. Si c'est le conjoint qui a hérité, elle est 1,42 fois supérieure. Si la personne de référence de l'un des ménages désireux d'être propriétaire a reçu une donation, la probabilité que le ménage achète sa résidence principale est 1,81 fois supérieure à celle d'un ménage n'ayant perçu aucune donation. Elle est 1,64 fois supérieure si c'est le conjoint qui a reçu une donation.

**Source :** Bertrand Garbinti, « L'achat de la résidence principale et la création d'entreprises sont-ils favorisés par les donations et héritages? », *Document de travail*, Direction des Études et Synthèses Économiques, INSEE, 2014. Sur la base de l'Enquête Patrimoine 2009-2010, personnes âgées de moins de 80 ans.

## Document n°7 : La redistributivité de l'aide financière familiale

### Un effet compensateur avéré selon l'âge...

Tableau 11  
L'entraide familiale égalise le revenu des ménages selon l'âge

Âge de la personne de référence	Revenu Primaire (1)		Revenu primaire + ressources sociales (1)	Revenu primaire + ressources sociales + solde entraide familiale	Revenu primaire + ressources sociales + solde entraide familiale - impôt (2)
	Montant (euros)	Indice de dissimilarité	Indice de dissimilarité	Indice de dissimilarité	Indice de dissimilarité
Moins de 25 ans	9 615	0,38	0,44	0,51	0,55
25 à 34 ans	21 922	0,88	0,92	0,94	0,97
35 à 44 ans	27 724	1,11	1,14	1,13	1,17
45 à 54 ans	31 819	1,28	1,26	1,24	1,22
55 à 64 ans	27 434	1,10	1,10	1,08	1,04
65 à 74 ans	21 304	0,86	0,82	0,81	0,79
75 ans et plus	18 844	0,76	0,72	0,72	0,72
		1	1	1	1
<b>Montant annuel moyen</b>	<b>24 921</b>	<b>24 921</b>	<b>27 534</b>	<b>27 562</b>	<b>25 094</b>

1. Salaire, revenu d'activité, préretraite, retraite, pension de réversion et revenu du patrimoine. Non compris les ressources exceptionnelles (héritage, produit d'une vente de voiture d'occasion, versement reçu d'une compagnie d'assurances, indemnités de licenciement, gains aux jeux) et les ressources sociales (allocations familiales, de chômage, minimum vieillesse, allocation handicapé, bourses d'études, RMI, aides au logement, aides sociales).  
2. Impôt sur le revenu et impôts locaux (taxe immobilière, taxe d'habitation).

Champ : ménages, France métropolitaine hors DOM.  
Source : enquête Budget de Famille, 2000-2001, Insee.

L'entraide financière familiale, selon que le ménage est gagnant ou perdant dans ces échanges, s'ajoute ou se retranche aux autres sources de revenus. Cette opération comptable est examinée du point de vue de ses effets redistributifs sur l'ensemble des ménages français, classés selon l'âge de la personne de référence [...] Les plus jeunes ménages ont, en moyenne, le revenu primaire le plus faible. L'*indice de dissimilarité* du revenu primaire – quotient du revenu primaire moyen de la classe d'âge par le revenu primaire total moyen – est une première mesure de l'inégalité. À cette première source de revenus issus du travail, quand sont ajoutées les ressources sociales, les écarts entre ménages d'âges différents se resserrent. Les classes d'âge les plus pauvres étant avantagées au détriment des plus riches, il y a bien réduction des inégalités économiques selon l'âge par la prise en compte des ressources sociales. Il en est de même avec le solde de l'entraide financière familiale. Au total, dans la redistribution qui s'opère des ménages plus âgés et notamment des âges « pivot » vers les ménages plus jeunes, la part des transferts familiaux – solde des aides financières reçues et offertes – est loin d'être négligeable. [...] L'égalisation des ressources entre ménages d'âges différents s'opère principalement par les transferts publics et non par les transferts privés de l'entraide familiale. [...] En régime permanent, c'est-à-dire après la période d'installation des jeunes ménages, le dispositif assurantiel public de la protection sociale prend le relai de l'entraide familiale.

... mais qui ne rapproche pas les niveaux de vie entre milieux socio-économiques

Tableau 12

L'entraide familiale n'a aucun effet redistributif entre milieux socioéconomiques

PCS de la personne de référence	Revenu Primaire (1)		Revenu primaire + ressources sociales (1)	Revenu primaire + ressources sociales + solde entraide familiale	Revenu primaire + ressources sociales + solde entraide familiale - impôt (2)
	Montant (euros)	Indice de dissimilarité	Indice de dissimilarité	Indice de dissimilarité	Indice de dissimilarité
Agriculteur, artisan, commerçant	22 372	0,90	0,88	0,88	0,87
Cadre, profession libérale, entrepreneur	45 249	1,82	1,72	1,71	1,61
Profession intermédiaire	28 812	1,16	1,12	1,12	1,12
Employé	17 390	0,70	0,73	0,73	0,76
Ouvrier	18 050	0,72	0,78	0,78	0,82
		1	1	1	1
<b>Montant moyen annuel</b>	<b>24 921</b>	<b>24 921</b>	<b>27 534</b>	<b>27 562</b>	<b>25 094</b>

1. Salaire, revenu d'activité, préretraite, retraite, pension de réversion et revenu du patrimoine. Non compris les ressources exceptionnelles (héritage, produit d'une vente de voiture d'occasion, versement reçu d'une compagnie d'assurances, indemnités de licenciement, gains aux jeux) et les ressources sociales (allocations familiales, de chômage, minimum vieillesse, allocation handicapé, bourses d'études, RMI, aides au logement, aides sociales).

2. Impôt sur le revenu et impôts locaux (taxe immobilière, taxe d'habitation).

Champ : ménages, France métropolitaine hors DOM.

Source : enquête Budget de Famille, 2000-2001, Insee.

Les débuts difficiles dans la vie active sont bien une forme de pauvreté que contribue à corriger l'entraide familiale. Mais cette entraide a-t-elle des effets analogues sur des formes plus permanentes d'inégalité socio-économique ou même de pauvreté comme en connaissent les chômeurs les plus âgés mal indemnisés, la main-d'œuvre peu qualifiée ou les « working poor » ? Sur le même principe que la comptabilité précédente, la redistributivité de l'entraide financière familiale est analysée en classant les ménages par milieux socio-économiques. Après avoir ajouté les ressources sociales et retranché les impôts, les ménages de cadre/profession libérale/entrepreneur restent toujours largement en tête de la hiérarchie des revenus moyens. Mais les ressources tirées du travail, des retraites et du patrimoine ont subi une érosion et celle-ci est plus forte que celle subie par les ménages de professions intermédiaires et de petits indépendants. Inversement, les ménages d'employés et d'ouvriers voient leur situation financière relative s'améliorer par ces transferts publics. [...] Le solde de l'entraide financière familiale, une fois introduit dans l'agrégat du revenu primaire et des ressources sociales, ne modifie pas l'indice de dissimilarité entre les cinq milieux socio-économiques. L'inégalité économique liée à la situation dans la hiérarchie sociale n'est donc ni accentuée ni diminuée par les aides financières familiales. L'analyse selon l'âge conduit à rapprocher l'aide financière familiale d'une assurance ou d'un organisme de crédit. L'absence d'effet redistributif entre milieux socio-économiques permet d'affiner le diagnostic : l'entraide financière familiale stabilise la situation du ménage au cours du cycle de vie, mais aux alentours d'une position sociale qui, elle, reste inchangée.

**Source** : Nicolas Herpin et Jean-Hugues Déchaux, 2004, « Entraide familiale, indépendance économique et sociabilité », *Economie et Statistique*, 373 (1).

SESSION 2024

---

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

---

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

*L'usage de la calculatrice est interdit.*

**Tournez la page S.V.P.**

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

\* \* \*

On pourra utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

\* \* \*

Il est demandé de **soigneusement** numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, en les encadrant ou en les soulignant. Il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de crayon n'est pas recommandée.

## PROBLÈME A.

Dans ce problème, on considère différents dés ayant diverses caractéristiques. Afin de les distinguer, on les nomme à l'aide de différentes couleurs. On rappelle qu'un dé est dit « bien équilibré » si, lors d'un lancer, chaque face apparaît avec la même probabilité.

### Dé rouge

Le dé rouge est **bien équilibré** et a 6 faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 5. Autrement dit, la face usuellement numérotée 6 a été remplacée par un second 5.

On lance ce dé rouge et on note  $R_0$  le résultat obtenu.

- (1) (1a) Donner la loi de  $R_0$ .
- (1b) Calculer son espérance  $E[R_0]$ .
- (2) On considère la variable aléatoire  $X$ , qui vaut 1 si  $R_0 = 5$  et 0 sinon.
  - (2a) Donner la loi de  $X$ .
  - (2b) Calculer son espérance et sa variance.

On fait dorénavant une succession de lancers du dé rouge, et on numérote les résultats  $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$ . On suppose toutes les variables aléatoires  $R_0, R_1, R_2, \dots$  indépendantes.

- (3) On considère la variable aléatoire  $Y = \min\{i \geq 1 : R_i = 5\}$ .
  - (3a) Donner la loi de  $Y$ .
  - (3b) Donner, sans calcul, son espérance  $E[Y]$ .
  - (3c) Donner, sans calcul, sa variance  $V[Y]$ .

On considère, pour  $i \geq 1$ , l'évènement  $S_i$  « les résultats obtenus aux lancers  $i - 1$  et  $i$  sont les mêmes », c'est-à-dire,  $S_i = \{R_{i-1} = R_i\}$ .

- (4) (4a) Pour un  $i \geq 1$  fixé, calculer la probabilité  $P(S_i)$ .
- (4b) Les évènements  $S_1, S_2, S_3, \dots$  sont-ils indépendants ?
- (4c) Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement  $\{R_1 = 5\}$ , sachant  $S_2$ .

- (5) On considère la variable aléatoire  $Z = \min\{i \geq 1 : R_i = R_{i-1}\}$ .
  - (5a) Exprimer  $Z$  en fonction de la suite d'évènements  $S_1, S_2, S_3, \dots$   
Une description textuelle sera acceptée.

Tournez la page S.V.P.

(5b) La variable aléatoire  $Z$  suit-elle une loi géométrique?

Une justification précise est attendue.

### Dé blanc

Le dé blanc est classique, bien équilibré et a 6 faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On lance ce dé blanc et on note  $B$  le résultat obtenu, que l'on suppose indépendant de  $R_0$ .

(6) Calculer la probabilité que  $B$  soit égal à  $R_0$ .

### Dé vert

Le dé vert est bien équilibré et a 6 faces, numérotées 1, 1, 3, 5, 5 et 5.

On lance ce dé vert et on note  $V$  le résultat obtenu, que l'on suppose indépendant de  $R_0$ .

(7) Calculer la probabilité que  $V$  soit égal à  $R_0$ .

On considère la fonction

$$f: \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \min\left(\frac{x}{2}, e^{2-x}\right)$$

où l'on rappelle que, pour deux réels  $a$  et  $b$ , on note  $\min(a, b)$  le minimum entre ces deux nombres.

(8) (8a) Calculer  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(2 + \ln(2))$ .

(8b) Montrer qu'il existe un unique point  $x \in \mathbf{R}_+$  tel que  $\frac{x}{2} = e^{2-x}$  et donner sa valeur.

(8c) Tracer le graphe de la fonction  $f$ .

On considère une variable aléatoire  $N$  à densité dont la densité est la fonction  $\lambda f$ , où  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  est un réel.

(9) (9a) Déterminer la valeur de  $\lambda$ .

(9b) Calculer  $P(N > 2)$ .

(9c) Pour  $x \in \mathbf{R}_+$ , calculer  $P(N > x + 2 \mid N > 2)$ .

(9d) Calculer l'espérance  $E[N]$ .

(10) On cherche à créer une variable aléatoire  $D$  à partir de  $N$  qui ait la même loi que la variable aléatoire  $V$  donnant le résultat d'un jet de dé vert. Pour cela, on choisit des réels  $0 < a < b$  et on décide que

— si  $0 \leq N < a$ , alors  $D = 1$ ;

— si  $a \leq N < b$ , alors  $D = 3$ ;

— si  $b \leq N$ , alors  $D = 5$ .

(10a) Calculer  $b$ .

(10b) Calculer  $a$ .

Pour tout réel  $x \in \mathbf{R}$ , on note  $[x]$  le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

(11) Construire, éventuellement en traçant son graphe, une densité  $g$  de probabilité telle que, si la variable aléatoire à densité  $G$  a pour densité  $g$ , alors  $[G]$  a la même loi que le résultat d'un jet de dé rouge  $R_0$ .

## PROBLÈME B.

On considère la fonction  $g: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $g(x) = x - 2e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x \in \mathbf{R}_+^*$ .

(12)(12a) Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

(12b) Déterminer la limite de  $g$  à droite en 0.

(12c) Le graphe de  $g$  intersecte-t-il la droite d'équation  $y = x$  ?

On considère la fonction  $h: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $h(t) = \ln(t) - t$  pour  $t \in \mathbf{R}_+^*$ .

(13)(13a) Étudier les limites de  $h$  au bord de son domaine de définition.

(13b) Montrer que  $h$  est dérivable et calculer sa dérivée.

(13c) Dresser le tableau de variation de  $h$ .

(13d) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbf{R}_+^*$ , on a  $\ln(2t) < t$ .

(13e) En déduire que, pour tout  $x \in \mathbf{R}_+^*$ , on a  $g(x) > 0$ .

On fixe un réel  $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $u_{n+1} = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}}$ .

(14)(14a) Montrer que  $u_n$  est ainsi bien défini pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

(14b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  admet une limite.

(14c) Montrer que la valeur de cette limite est  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

On se donne un réel  $\alpha > 0$ .

(15)(15a) Donner un développement limité à l'ordre 1 en  $s = 0$  de la fonction  $s \mapsto (1 - s)^{-\alpha}$ .

(15b) Déterminer la limite de  $2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}}$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

(15c) Déduire des deux questions précédentes que  $u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

(15d) Soit un réel  $\varepsilon > 0$ . En écrivant que  $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq |u_n^{-\alpha} - u_p^{-\alpha}| + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|$  pour un entier  $p$  bien choisi, montrer qu'il existe un entier  $q \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \geq q$ , on a l'inégalité  $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq 2\varepsilon n$ .

(15e) En déduire la limite du quotient  $\frac{u_n^{-\alpha}}{n}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

(15f) Calculer la limite de  $n^\alpha u_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

On considère dorénavant  $F: \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $F(x, y) = x - ye^{-\frac{1}{x}}$  pour  $(x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ .

(16)(16a) Calculer les dérivées partielles de  $F$ .

(16b) Trouver les extremums locaux de  $F$ .

On fixe  $y \in \mathbf{R}_+^*$  et on s'intéresse à l'équation  $F(x, y) = 0$ , où l'inconnue est donc la variable  $x$ .

(17)(17a) En posant  $t = \frac{1}{x}$ , montrer que l'équation  $F(x, y) = 0$  se ramène à une équation  $h(t) = r$ , où  $t \in \mathbf{R}_+^*$  est l'inconnue,  $r$  est un réel, et  $h$  est la fonction introduite juste avant la question (13).

(17b) Déterminer, selon la valeur de  $r$ , le nombre de solutions à l'équation  $h(t) = r$ .

(17c) En déduire, selon la valeur de  $y$ , le nombre de solutions à l'équation  $F(x, y) = 0$ .

### PROBLÈME C.

Dans tout le problème, on note  $I_3$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ . Pour une matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , on note  $M^T$  sa transposée. Enfin, on note  $\langle u, v \rangle$  le produit scalaire entre les vecteurs  $u$  et  $v$  de  $\mathbf{R}^3$ , ainsi que  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  la norme de  $u$ .

**Cas particulier.** On considère l'application

$$\rho: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-y, z, -x).$$

(18)(18a) Montrer que  $\rho$  est une application linéaire et exprimer la matrice  $A$  représentant  $\rho$  dans la base canonique.

(18b) Calculer  $A^T A$ . La matrice  $A$  est-elle inversible?

(19)(19a) Montrer que l'endomorphisme  $\rho$  admet 1 comme valeur propre et déterminer un vecteur propre associé que l'on notera  $v_1$ .

(19b) On introduit le vecteur  $v_2 = (2, 1, 1)$ . Calculer  $\langle v_1, v_2 \rangle$ .

(19c) Déterminer un vecteur  $v_3$  tel que  $\langle v_3, v_2 \rangle = 0$ ,  $\langle v_3, v_1 \rangle = 0$  et  $\|v_3\| = \|v_2\|$ .

(19d) Montrer que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ .

(19e) Déterminer quatre réels  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta$  tels que  $\rho(v_2) = \alpha v_2 + \beta v_3$  et  $\rho(v_3) = \gamma v_2 + \delta v_3$ .

(19f) Donner la matrice  $B$  de l'endomorphisme  $\rho$  dans la base  $(v_1, v_2, v_3)$ .

(19g) Trouver un réel  $\theta$  pour lequel  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

**Cas général.** Pour une matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , on note  $\mathcal{S}(M)$  l'ensemble de ses valeurs propres.

Soit  $C \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  une matrice telle que  $C^T C = C C^T = I_3$ .

(20) Dans cette question, on suppose que  $-1 \notin \mathcal{S}(C)$ .

(20a) Montrer que la matrice  $C^T + I_3$  est inversible.

(20b) Calculer  $(C^T + I_3)(C - I_3)$ .

(20c) Montrer qu'il existe des réels  $a, b, c$  tels que  $C - C^T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ .

(20d) Montrer que le noyau de l'application représentée par  $C - C^T$  est non nul.

(20e) En déduire que 1 est valeur propre de la matrice  $C$ .

(21) On ne suppose plus que  $-1 \notin \mathcal{S}(C)$ . Montrer que  $1 \in (\mathcal{S}(C)) \cup (\mathcal{S}(-C))$ .

Pour toute matrice colonne non nulle  $Z \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ , on note  $\|Z\| = \sqrt{Z^T Z}$  la norme du vecteur associé et on définit la matrice

$$H_Z = 2 \frac{Z Z^T}{\|Z\|^2} - I_3.$$

(22) Soit  $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$  non nulle, ainsi que  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$  et  $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ .

(22a) Calculer  $(H_V)^T$ ,  $H_V V$ , et  $(H_V)^T H_V$ .

(22b) Montrer que  $H_V X = Y$  équivaut à  $H_V Y = X$ .

Soient maintenant  $X$  et  $Y$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tels que  $\|X\| = \|Y\| = 1$  et  $X + Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(23)(23a) Calculer  $H_{X+Y} X$ .

(23b) On fixe  $\tau \in \mathbb{R}$ . On note

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tau) & \sin(\tau) \\ 0 & -\sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on fixe  $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tel que  $V \neq -e_1$  et  $\|V\| = 1$ , et on considère  $M = H_{V+e_1} R H_{V+e_1}$ . Montrer que  $M^T M = I_3$  et que  $V$  est un vecteur propre de  $M$ .

On considère une application linéaire  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On suppose que  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, \varphi(x) = x\}$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1. On note  $u$  un élément de  $E_1$  tel que  $\|u\| = 1$ .

(24)(24a) Montrer que si  $\langle x, u \rangle = 0$ , alors  $\langle \varphi(x), u \rangle = 0$ .

(24b) On note  $\varphi(E_1^\perp) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \exists x \in E_1^\perp, y = \varphi(x)\}$ . Montrer que  $\varphi(E_1^\perp) \subset E_1^\perp$ .

(24c) On considère une base orthonormée  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  de  $\mathbb{R}^3$  dont le premier vecteur est  $u$ . On note

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Déterminer la première ligne et la première colonne de  $N$ , c'est-à-dire les valeurs des coefficients  $n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{21}$  et  $n_{31}$ .

(24d) Que vaut le produit  $\begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$  ?