ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE
DE LYON

15 parvis René-Descartes
BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tél. +33 (0)4 37 37 60 00
www.ens-lyon.fr

Concours d'entrée 2026

Annexe sujets

Mathématiques Série Sciences Économiques et Sociales

UNIVERSITÉ DE LYON

ENS DE LYON

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère deux matrices A et B non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses :
$$A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad AB = BA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$
On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique et de même, g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont B est la matrice dans la base canonique.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.
   (b) Justifier que $\mathrm{Im}(g)$ est le sous-espace propre de g associé à la valeur propre 1.
   (c) On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que :
$$I_n \in \mathrm{Vect}(A, B) \iff A + B = I_n$$

2. On reprend les mêmes hypothèses et notations que dans la question 1.
   (a) On suppose que $n = 2$. Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est égale à 1.
   (b) On suppose que $n = 2$. Montrer que $I_2 = A + B$.
   (c) Justifier en donnant un contre-exemple que pour $n = 3$, la relation $I_3 = A + B$ n'est plus nécessairement vérifiée.
   Indication : vous pourrez utiliser des matrices diagonales.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et λ et μ deux réels non nuls et distincts.
Dans cette question, M, A et B désignent des matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que :
$$A + B = I_n, \quad M = \lambda A + \mu B, \quad M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$$
   (a) Montrer que : $A^2 = A$ et $B^2 = B$ puis que $AB = BA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
   (b) Montrer que M est inversible et déterminer une expression de son inverse en fonction de A et B.
   (c) Déterminer les valeurs propres de M.

Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique décalée de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$P(X = k) = p(1 - p)^k.$$

1. On note A l'événement « X est impaire ».
Calculer la probabilité de A.

2. On considère la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - 1}{2} \times \left|\sin\left(\pi \dfrac{X}{2}\right)\right|$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Dans la suite de l'exercice, on notera ℓ sa limite.
2. (a) Pour tout $a \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$u_n \leq a + \frac{1}{(1+a^4)^n}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $a \in]0,1[$: $\ell \leq a$.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \frac{1}{2^n} + 4n \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n2^{n+2}} - \frac{u_n}{4n}.$$
   (c) Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{n}$.
4. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

TSVP

Exercice 2.

Soit $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers. On considère $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ des matrices inversibles distinctes appartenant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$G = \{A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}\} \text{ et } S = \sum_{i=0}^{p-1} A_i.$$

On suppose que, pour tout $(i,j) \in \{0,1,\ldots,p-1\}^2$, $A_i A_j \in G$.
Soit $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$. On considère l'application φ_k de G dans lui-même définie par :

$$\forall A \in G,\ \varphi_k(A) = A_k A.$$

On admet dans cet exercice que, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, φ_k est bijective.

1. (a) Justifier que, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, $S = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi_k(A_i)$.
   (b) En déduire que, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, $S = A_k S$.
   (c) Montrer que $S^2 = pS$.
   (d) Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(S - pI_n) \oplus \ker(S)$.
   (e) En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$P^{-1}SP = \left(\begin{array}{c|c} pI_m & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right),$$

   où m est un entier tel que $0 \leq m \leq n$.
   (f) Montrer que $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}(S)$ est un entier naturel, où $\mathrm{Tr}(S)$ désigne la trace de la matrice S.
2. Montrer que $\ker(S - pI_n) = \{u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \forall A \in G, Au = u\}$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note A la plus grande valeur propre de M et B la plus petite.

1. Exprimer A et B en fonction de X et Y.
   On admet dans la suite que A et B sont des variables aléatoires.
2. Montrer que A et B admettent toutes les deux une variance que l'on calculera.
3. Calculer la covariance de A et B.
4. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la loi de B.

Exercice 2.

1. Justifier que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ est convergente.
2. (a) Justifier que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

Dans la suite de l'exercice, on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, exprimer la valeur de l'intégrale I en fonction de la valeur de l'intégrale J.

3. (a) Pour tout entier naturel n, justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln^2(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln^2(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

(c) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{I}{4}.$$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.
On note $\mathcal{S}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\right\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\right\}$ celui des matrices antisymétriques.
Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr} M$ désigne la trace de M.

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}_n$, calculer la trace de A.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
3. On considère l'équation (E) : $M + {}^tM = 2(\operatorname{Tr} M)I_n$, où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions de (E).
   (a) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathscr{E} = \mathcal{A}_n$.
4. On considère l'équation
$$\text{(E')}: M + {}^tM = \frac{2}{n}(\operatorname{Tr} M)I_n$$
   où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Déterminer l'ensemble des solutions $\mathscr{E}'$ de (E').

Exercice 2.

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. On suppose pour cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
   (a) Démontrer que
$$\forall x \geq 0,\ 0 \leq \frac{x}{2}f(x) \leq \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\forall t \in [0, +\infty[,\ g(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$$
   fournit un contre-exemple à la réciproque de l'implication démontrée dans la question 1.

TSVP

3. On rappelle que $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t, c'est-à-dire que $\lfloor t \rfloor$ est l'unique entier vérifiant $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$.
On désigne par h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} t(1-t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = h\left(2^{\lfloor t \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor)\right).$$

(a) Vérifier que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout entier naturel n et tout réel t appartenant à l'intervalle $[n, n+1[$, donner l'expression de $f(t)$ en fonction de h, t et n.

(c) Justifier que la fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

(d) En utilisant un changement de variable, justifier que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^k}\int_0^1 h(u)\,\mathrm{d}u.$$

(e) Pour tout entier naturel non nul n, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

(f) En utilisant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des réels $a_n = n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour n entier naturel, justifier que $xf(x)$ ne converge pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit $n \geq 2$ un entier, on pose $E = \mathbb{R}^n$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur E, $\| \cdot \|$ la norme associée et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.
On considère l'endomorphisme $f : E \to E$ défini par :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ f(e_i) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels, on pose $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et on suppose que $m > n$.
On définit un endomorphisme $d : E \to E$ en posant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d(e_i) = a_i e_i$.
On note enfin $g = f + d$.

1. (a) Montrer que le vecteur $w = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ est un vecteur propre de f.
   À quelle valeur propre est-il associé ?
   (b) Déterminer une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$.
   (c) Montrer que $\mathscr{B}' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$ est une base de $\ker f$.
   (d) Montrer que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^\perp$.
   (e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.
   (f) Montrer que, pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| \leq n\|u\|$.
2. (a) Montrer que d est bijectif.
   (b) Montrer que, pour tout $u \in E$, $\|d(u)\| \geq m\|u\|$.
   (c) Montrer que, pour tout $v \in E$:
   $$\|d^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{m}\|v\|.$$
   (d) Montrer que, pour tout $u \in E$ non nul, $\|f(u)\| < \|d(u)\|$.
   (e) En déduire que g est bijectif.

Exercice 2.

On définit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par, pour tout $x > 0$, $g(x) = x(\ln x)^2$.

1. (a) Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
   On note h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1, +\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln[h(x)] + 2\ln[\ln(h(x))] = \ln x$.
   (c) Déterminer un équivalent de $\ln[h(x)]$ quand x tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire un équivalent de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2g(|x|)} & \text{si } |x| < \dfrac{1}{\mathrm{e}} \text{ et } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que f est une densité de probabilité.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Une urne contient trois jetons numérotés $1, 2, 3$. On y effectue des tirages avec remise.
On considère la variable aléatoire Y correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un jeton différent du premier tiré et la variable aléatoire Z correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième jeton différent.

1. Déterminer la loi de Y.
2. (a) Quelle est la loi de $X = Y - 1$?
   (b) En déduire l'espérance et la variance de Y.
3. Soit $n \geq 2$ et $m \geq 3$ des entiers. Calculer $P((Y = n) \cap (Z = m))$.
4. En déduire la loi de Z.
5. Justifier que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 2.

On note E l'ensemble des fonctions $\phi\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues, bornées et telles que, pour tout réel strictement positif x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\phi(t)}{x^2 + t^2}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

1. La fonction constante égale à 1 sur $[0, +\infty[$ est-elle un élément de E ?
2. On considère la fonction ϕ définie sur $[0, +\infty[$ par : $\phi(t) = \dfrac{t}{1 + t^2}$.
   (a) Montrer que la fonction ϕ appartient à E.
   (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on ait :

$$\frac{t^2(1 - x^2)}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)} = \frac{a}{1 + t^2} + \frac{bx^2}{x^2 + t^2}.$$

   Dans la suite, on pose, pour tout réel strictement positif x, $\psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\phi(t)}{x^2 + t^2}\, \mathrm{d}t$.

   (c) En déduire la valeur de $\psi(x)$ pour tout réel x strictement positif et différent de 1.
   (d) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\psi(1)$.
   (e) Vérifier que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
   (a) i. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x > A,\ \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1.$$

   ii. En déduire que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que si $\ell \neq 0$, f n'appartient pas à E.
   (c) La fonction f appartient-elle à E si $\ell = 0$?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_n(x,y) = (x^n - y)e^{x-y}.$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f_n.
2. On suppose ici que $n = 2$.
   (a) Vérifier que la fonction f_2 admet un unique point critique (x_0, y_0) que l'on précisera.
   (b) Montrer que la fonction f_2 admet un extremum local en (x_0, y_0) et préciser sa nature.
3. On suppose ici que $n = 1$. On considère la fonction φ définie par : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto te^t$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction f_1.
   (b) Vérifier que la fonction φ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
   (c) Pour tout couple (x, y) de réels, exprimer $f_1(x, y)$ à l'aide de la fonction φ.
   (d) En déduire qu'en chacun de ses points critiques, la fonction f_1 admet un minimum global.

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ un entier et on note $E = \mathbb{R}^n$. On considère $u\colon E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle et un vecteur $a \in E$ non nul.
On définit l'application f par :

$$\forall x \in E, \ f(x) = u(a)x - u(x)a.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Calculer $f(a)$.
   (b) Déterminer $\ker f$ et $f(\ker u)$ où $f(\ker u) = \{f(x)\colon x \in \ker u\}$.
   Indication : distinguer les cas où $a \in \ker u$ et $a \notin \ker u$.
3. On suppose que $u(a) = 0$.
   (a) Justifier que 0 est l'unique valeur propre de f.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (c) Déterminer le rang de f et donner une base de l'image de f.
   (d) Calculer $f \circ f$.
4. On suppose que $u(a) \neq 0$.
   (a) Déterminer les sous-espaces propres de f.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit c un nombre réel, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} c(e^x - 1) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Déterminer c tel que la fonction f soit une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on désigne par X une variable aléatoire admettant la fonction f comme densité. Les résultats des calculs pourront être donnés en fonction du réel c.

(b) Déterminer une expression de la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

2. On considère la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1-X}$.
   (a) Déterminer une expression de la fonction de répartition G de la variable aléatoire Y.
   (b) En déduire que Y admet une densité et préciser une expression de cette densité.
   (c) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?
3. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre n. On notera $u_n = \mathrm{E}(X^n)$ la valeur de ce moment d'ordre n, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (c) Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X^n \geq \varepsilon) = 0$.
4. (a) En utilisant des intégrations par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - (n+1)u_n + c\frac{n+1}{n+2}.$$

   (b) En déduire les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. (a) Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(a_i) = b_i$.
   Indication : vous pourrez considérer l'application $u : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $Q \longmapsto (Q(a_0), \ldots, Q(a_n))$.
   (b) Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Expliciter le polynôme P dans le cas où, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

   Dans la suite de l'exercice, on notera L_k ce polynôme P.
2. Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Montrer que, pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $X^p = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k$.
4. On suppose dans cette question que $n = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.
   (a) Calculer L_0, L_1 et L_2.
   (b) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 1$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Pour tout entier naturel k, on considère les intégrales $I_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\,\mathrm{d}t$ et $J_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2k}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ et calculer la valeur de sa somme.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et que sa somme est inférieure ou égale à 2.

2. (a) Justifier que
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

   (b) En déduire que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_k - I_{k+1}\right).$$

   (c) Démontrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k.$$

   (d) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k > 0$, puis étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{J_k}{I_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

3. (a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1)J_{k-1}$.

   (b) En déduire que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}.$$

   (c) Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit λ_1, λ_2 des réels strictement positifs et X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   (a) Donner $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.
   (b) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0,1[$ et $\lambda \in]0, +\infty[$. On considère des variables aléatoires X et Y. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $(m,k) \in \mathbb{N}^2$,
$$P(X = k | Y = m) = \begin{cases} \dbinom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \in [\![0, m]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) On pose $Z = Y - X$. Déterminer la loi de Z.
   (c) X et Y sont-elles indépendantes ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère dans cet exercice un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Soit $p \in \{0, \dots, n\}$ un entier. Calculer, selon les valeurs de p, la somme $s_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp}$.

2. (a) Démontrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

   (b) Vérifier que, pour tous nombres réels θ_1 et θ_2, on a :
   $$e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

   (c) Déduire de ce qui précède que :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = 2n.$$

   On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$.

3. Soient a et b deux nombres complexes.

   (a) Montrer que :
   $$n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

   (b) Montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|b + \omega^k a\right|.$$

   (c) En déduire l'inégalité suivante :
   $$\frac{|a| + |b|}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

TSVP

Exercice 2.

On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I, alors $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

1. (a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

   (b) Justifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1,1[$, la série de terme général $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^n$ est convergente.

2. (a) Justifier que la fonction φ définie sur $]-\infty,1[$ par

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

   est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$ et démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-\infty,1[, \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n \times n!}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. (a) Pour tout couple (t,x) de réels vérifiant $0 \leq t \leq x < 1$, vérifier que :

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

   (b) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. En déduire, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1[$, la valeur de la somme de la série de terme général $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^n$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et pour tous événements $A_1, \dots, A_p$ tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{p-1}) \neq 0$, on a :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_p) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_p|A_1 \cap \cdots \cap A_{p-1}).$$

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages au hasard dans cette urne de la manière suivante :

— À chaque tirage d'une boule blanche, on replace cette boule dans l'urne, puis on ajoute des boules blanches jusqu'à avoir multiplié par deux le nombre de boules blanches dans l'urne ;

— Si on tire la boule noire, on arrête les tirages.

Ainsi, le nombre de boules blanches dans l'urne est multiplié par deux à chaque étape (sauf la dernière ou le jeu s'arrête).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent que des boules blanches », et on pose $u_n = P(B_n)$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^k+1}$.
4. On note B l'événement « les tirages ne s'arrêtent jamais ».
   (a) Justifier que $P(B) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) Étudier la convergence de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
   (c) En déduire que $P(B) \neq 0$.

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ un entier, on pose $E = \mathbb{R}^n$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur E, $\| \cdot \|$ la norme associée et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de E.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non identiquement nulle.
   Montrer que $\ker \varphi$ est de dimension $n - 1$.
2. (a) Soit v un vecteur non nul de E.
   Montrer que l'application $\psi_v : x \mapsto \langle v, x \rangle$ est une application linéaire de E vers $\mathbb{R}$.
   Préciser le noyau de ψ_v.
   (b) Réciproquement, montrer que, pour toute application linéaire φ non identiquement nulle de E vers $\mathbb{R}$, il existe un unique vecteur non nul $v \in E$ tel que $\varphi = \psi_v$.
   Indication : pour une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ et $x \in E$, on pourra calculer $\varphi(x)$ en écrivant x dans la base canonique.

TSVP

3. Soit φ une application linéaire non identiquement nulle de E vers $\mathbb{R}$, u un vecteur non nul de $H = \ker \varphi$ et $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)u \qquad (*)$$

   (a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f.

   (b) f est-il diagonalisable ?

   (c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Indication : utiliser la question 2 (b).

   (d) Justifier que f est bijectif puis montrer que f^{-1} peut être défini par une formule analogue à $(*)$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

1. (a) Étudier les variations et les limites de la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 1 - xe^x.$$

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction g. On montrera en particulier qu'il existe un unique extremum, atteint en un réel que l'on notera α.

   (c) Justifier que $0 < \alpha < 1$.

On pose $I = [0, \alpha]$.

   (d) Montrer que, pour tout x dans I, $g(x)$ appartient à I.

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I.$$

   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2.

On considère deux jetons J_1 et J_2, équilibrés (c'est-à-dire que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard de manière équiprobable un jeton puis effectue une série de lancers indépendants avec ce jeton.
On note E l'événement : « le jeton J_1 est choisi pour le jeu ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note V_n l'événement : « le joueur obtient n fois 1 lors des n premiers lancers ».

   (a) Déterminer $P(V_n)$.

   (b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

TSVP

Dans la suite de l'exercice, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si le numéro 1 n'apparaît jamais.

2. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = n)$.
   (b) En déduire que $P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(Y = n)$.
   (b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.
4. On considère la variable aléatoire $S = \max(X, Y)$.
   (a) Déterminer $S(\Omega)$.
   (b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) Déterminer la loi de S puis préciser son espérance et sa variance.
5. On considère la variable aléatoire $T = \min(X, Y)$.
   Déterminer la loi de T puis préciser son espérance et sa variance.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$ définie par, pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2(1+t)}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $x\in]-1,+\infty[$.

On note, pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $F(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. (a) Étudier les variations de F sur $[0,+\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=F(x_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n>0$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha>0$ tel que $F(\alpha)=\alpha$.
   (c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|x_n-\alpha|$.
   (d) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) Déterminer un équivalent de la suite de terme général $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

Soit $n\geq 2$ un entier naturel. On note $E=\mathbb{R}^n$ et on considère un endomorphisme diagonalisable f de E ainsi qu'une valeur propre λ de f.
L'objectif de cet exercice est de démontrer que :

$$E=\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Im}\,(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$$

1. Démontrer la propriété dans le cas où λ est l'unique valeur propre de f.
2. Dans la suite, on suppose que f possède au moins deux valeurs propres distinctes et on note $\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les $p+1$ valeurs propres deux à deux distinctes de f, avec p entier naturel non nul. On notera également, pour tout i appartenant à $\{1,2,\ldots,p\}$: $E_{\lambda_i}=\ker(f-\lambda_i\,\mathrm{Id}_E)$.
   (a) Justifier que $\dim\left(E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus E_{\lambda_p}\right)=\mathrm{rg}\,(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$.
   (b) Soient i appartenant à $\{1,2,\ldots,p\}$ et u un vecteur appartenant à E_{λ_i}. Démontrer que u appartient à $\mathrm{Im}\,(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$.
   (c) En déduire que $E=\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Im}\,(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$
3. Donner un exemple d'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^2$ admettant une valeur propre λ et tel que l'égalité $E=\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Im}\,(f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$ ne soit pas vérifiée.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère les fonctions f et g définies par :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{\ln x}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

On admet dans cet exercice que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. (a) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.
   Dans la suite, on note encore f et g les prolongements ainsi obtenus.
   (c) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $0 \leq g(x) \leq 1$.
2. On pose $L(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que L est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que $L(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Indication : on pourra faire le changement de variable $x = -\ln t$.
3. Pour tout entier $k \geq 1$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.
4. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = g(x)\,\mathrm{e}^{-nx}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$ converge.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = 0$.
5. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$L(0) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$
   (b) En déduire la valeur de $L(0)$.

Exercice 2.

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ jusqu'à obtenir deux piles consécutifs. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = P(X = n)$ et A_n l'événement « on obtient pile au n-ième lancer ».

1. Calculer a_1 et a_2.
2. Montrer que $\{\overline{A_1}, A_1 \cap \overline{A_2}, A_1 \cap A_2\}$ est une famille complète d'événements.
3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$.
   (b) Pour tout $n \geq 1$, déterminer a_n en fonction de n.
4. Calculer la probabilité que le jeu se termine.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Une machine produit de manière aléatoire et indépendante deux types de pièces. Les pièces de type A sont produites avec probabilité $a \in]0,1[$ et les pièces de type B avec probabilité $b = 1-a$.
Chaque pièce produite a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être défectueuse, indépendamment de son type et des autres pièces. On introduit les variables aléatoires suivantes :

- X est égale au nombre de pièces produites jusqu'à l'apparition de la première pièce de type A ;
- D est égale au nombre de pièces défectueuses produites jusqu'à l'apparition de la première pièce de type A.

1. Déterminer la loi de X et préciser son espérance et sa variance.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(D=n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} b^{k-1} a$.

On rappelle que, pour deux entiers naturels m et r, on a $\binom{r}{m} = \begin{cases} \dfrac{r!}{(r-m)!m!} & \text{si } m \leq r \\ 0 & \text{si } m > r \end{cases}$

On admet que :

$$\forall (r,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{r}{m} + \binom{r}{m+1} = \binom{r+1}{m+1}.$$

Posons, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = P(D=n)$.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = bpu_n + b(1-p)u_{n+1}$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis en déduire u_0.
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $D+1$ puis en déduire la valeur de l'espérance de D.

Exercice 2.

Dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\| \cdot \|$ la norme associée.
Soit a, b, c des réels tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$ et c est non nul.
On considère le vecteur $\omega = (a,b,c)$ et la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le rang de M.
2. Montrer que pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$, on a : $\langle \varphi(u), v \rangle = -\langle u, \varphi(v) \rangle$.
3. Quelle est la seule valeur propre possible de φ ? Déterminer le sous-espace propre associé à cette valeur propre.
4. Déterminer une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}(c, 0, -a)$ et $\varphi(e_3) = (0,0,0)$.
5. Écrire la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$.
6. L'endomorphisme $\varphi \circ \varphi$ est-il diagonalisable ?
7. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur orthogonal à ω. Calculer $\varphi \circ \varphi(u)$.