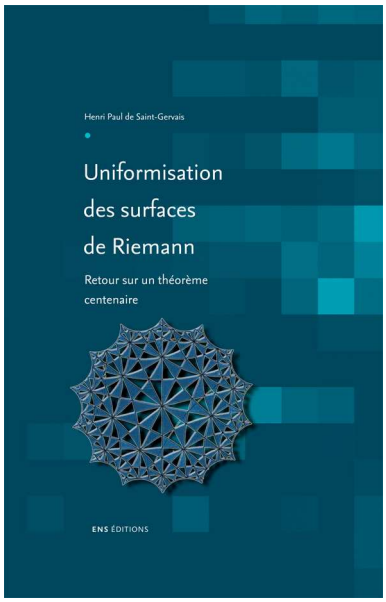
ENS ÉDITIONS
École normale supérieure de Lyon

Les éditions de l'ENS de Lyon ont le plaisir de vous présenter



Uniformisation des surfaces de Riemann

Retour sur un théorème centenaire

Henri Paul de Saint-Gervais

En 1907, Paul Koebe et Henri Poincaré démontraient presque simultanément le théorème d'uniformisation : *Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe au plan, au disque ou à la sphère*.

Il a fallu tout un siècle avant d'oser énoncer ce théorème et d'en donner une démonstration convaincante, grâce aux travaux de Gauss, Riemann, Schwarz, Klein, Poincaré et Koebe (entre autres). Ce livre propose quelques points de vue sur la maturation de ce théorème.

L'évolution du théorème d'uniformisation s'est faite en parallèle avec l'apparition de la géométrie algébrique, la création de l'analyse complexe, les premiers balbutiements de l'analyse fonctionnelle, avec le foisonnement de la théorie des équations différentielles linéaires et la naissance de la topologie. Le théorème d'uniformisation est l'un des fils conducteurs du XIXe siècle mathématique.

Il ne s'agit pas ici de décrire l'histoire d'un théorème mais de revenir sur des preuves anciennes, de les lire avec des yeux de mathématiciens modernes, de s'interroger sur la validité de ces preuves et d'essayer de compléter celles-ci en respectant autant que possible les connaissances de l'époque, voire, si cela s'avère nécessaire, en utilisant des outils mathématiques modernes qui n'étaient pas à la disposition de leurs auteurs.

Ce livre sera utile aux mathématiciens d'aujourd'hui qui souhaitent jeter un regard sur l'histoire de leur discipline. Il pourra également permettre à des étudiants de niveau master d'accéder à ces concepts si importants de la recherche contemporaine en utilisant une voie inhabituelle.

> *On en conclut :*
> *« 1° que toute équation différentielle linéaire à c oefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes.*
> *2° que les coordonnées des points d'une courbe algé brique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire. »*
>
> Henri Poincaré, le 8 août 1881

Le nom d'Henri Paul de Saint-Gervais recouvre un collectif composé de quinze mathématiciens. Cet ouvrage résulte de leur travail mené à l'occasion du centenaire du théorème de Riemann.

Janvier 2011
544 pages
Relié
16 x 24
ISBN 978-2-84788-233-9
29 euros

Sommaire au dos

ENS ÉDITIONS

École normale supérieure de Lyon
15 parvis René Descartes
BP 7000
69342 Lyon cedex 07

Contact :
Isabelle Jacquet
Tel 04 37 37 64 08
Fax 04 37 37 60 96
isabelle.jacquet@ens-lyon.fr

Tous nos ouvrages sont disponibles en librairie

Distribution : CID
Tel 01 53 48 56 30
Commandes par Dilicom

ou en commande en ligne au

Comptoir des presses d'université :

www.lcdpu.fr

SOMMAIRE

Avant-propos
Introduction générale

PARTIE A. LES SURFACES DE RIEMANN

I Travaux précurseurs
I.1 À propos du développement des nombres complexes — I.2 La cartographie — I.3 Un survol du développement des fonctions elliptiques
II Riemann
II.1 Préliminaires : fonctions holomorphes et surfaces de Riemann — II.2 Principe de Dirichlet et conséquences — II.3 Variété jacobienne et espaces de modules
III Surfaces de Riemann et surfaces riemanniennes
III.1 Felix Klein et l'illustration de la théorie de Riemann — III.2 Retour moderne à la théorie de Riemann
IV Le travail de Schwarz
IV.1 Structure conforme sur la sphère — IV.2 Problèmes explicites de représentation conforme

INTERMEZZO

V La quartique de Klein
V.1 Formes modulaires, invariant j — V.2 Comment Klein paramètre sa quartique

PARTIE B. METHODE DE CONTINUITÉ

VI Groupes fuchsiens
VI.1 Groupes fuchsiens, polygone fondamental et pavage hyperbolique — VI.2 Exemples — VI.3 Algébrisation d'après Poincaré — VI.4 Appendice
VII La « méthode de continuité »
VII.1 Préliminaires — VII.2 Représentations des groupes de surfaces — VII.3 Représentations réelles fidèles et discrètes — VII.4 Preuve de l'uniformisation
VIII Équations différentielles et uniformisation
VIII.1 Préliminaires : quelques aspects des équations différentielles algébriques du premier ordre — VIII.2 L'approche de Poincaré — VIII.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2, équations normales et équations uniformisantes — VIII.4 L'ensemble des équations normales sur une courbe fixée — VIII.5 Monodromie des équations normales et uniformisation des courbes algébriques
IX Exemples et développements
IX.1 Théorie de Fuchs locale — IX.2 Équation hypergéométrique de Gauss et liste de Schwarz — IX.3 Exemples de familles d'équations normales — IX.4 Uniformisation des sphères privées de 4 points — IX.5 Postérité

INTERMEZZO

X L'uniformisation des surfaces et l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$
X.1 L'uniformisation des surfaces et l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$ — X.2 Comment Poincaré résout l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$ — X.3 Conclusion : uniformisation des surfaces de Riemann algébriques, prescription de courbure et calcul des variations

PARTIE C. VERS LE THÉORÈME D'UNIFORMISATION GÉNÉRAL

XI L'uniformisation des fonctions
XI.1 Uniformisation des domaines relativement compacts à bords — XI.2 Exhaustion par des domaines relativement compacts simplement connexes — XI.3 Paramétrage par un ouvert simplement connexe du disque — XI.4 Théorème d'Osgood — XI.5 Le problème des ramifications
XII La preuve de Koebe du théorème d'uniformisation
XII.1 Principe de la preuve — XII.2 Cas où la suite (c_k) est bornée — XII.3 Cas où la suite (c_k) tend vers l'infini
XIII La preuve de Poincaré du théorème d'uniformisation
XIII.1 Stratégie de la preuve — XIII.2 Existence d'une majorante de Green sur l'anneau A — XIII.3 La preuve plus directe de Koebe
Épilogue

APPENDICES

Correspondance entre Klein et Poincaré
Quelques repères historiques
Bibliographie
Index