

**COMPOSITION D'HISTOIRE CONTEMPORAINE**

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines - Cachan

DURÉE : 6 heures

*L'usage de toute calculatrice est interdit*

**La France et les Français face à l'étranger (1870-1945)**

**Orientation chronologique**

- 1870 2 septembre : défaite de Sedan  
24 octobre : décret Crémieux accordant la citoyenneté française aux Juifs d'Algérie
- 1887 Affaire Schnaebelé
- 1888 Premier emprunt russe émis sur la place de Paris
- 1889 26 juin : loi sur la nationalité française
- 1892 10 janvier : tarif Méline
- 1893 Août : tuerie xénophobe d'Aigues-Mortes
- 1894 22 décembre : Dreyfus condamné par un tribunal militaire
- 1898 Novembre : évacuation des troupes françaises de Fachoda
- 1900 Exposition universelle internationale de Paris
- 1904 8 avril : « Entente cordiale » entre la France et le Royaume-Uni
- 1909 Premier spectacle de la Compagnie des « Ballets russes » à Paris
- 1911 4 novembre : convention franco-allemande sur le Maroc et le Congo
- 1914 3 août : déclaration de guerre de l'Allemagne à la France
- 1917 28 juin : la première division américaine débarque à Saint-Nazaire
- 1919 18 janvier : ouverture de la Conférence de la paix
- 1924 Jeux olympiques de Paris
- 1925 La « Revue nègre », avec Joséphine Baker
- 1927 10 août : loi facilitant l'accès à la nationalité française
- 1931 Exposition coloniale internationale de Paris
- 1932 10 août : loi de « protection de la main-d'œuvre nationale »
- 1934 Premier numéro du *Journal de Mickey*
- 1936 1<sup>er</sup> août : déclaration de Blum sur la « non-intervention » en Espagne
- 1938 Rejet par le Sénat du projet Blum-Viollette  
30 septembre : accords de Munich  
12 novembre : décret-loi prévoyant la création de centres spéciaux pour l'internement des « étrangers indésirables »
- 1939 3 septembre : déclaration de guerre de la France à l'Allemagne  
26 septembre : dissolution du PCF
- 1940 3 juillet : les Anglais coulent une partie de la flotte française à Mers El-Kebir
- 1940 3 octobre : premier statut des Juifs
- 1942 Vercors, *Le silence de la mer*
- 1945 23 février : les premiers *libertyships* accostent au Havre et à Saint-Nazaire  
23 juillet : ouverture du procès Pétain

SESSION 2008

---

**COMPOSITION DE SCIENCES SOCIALES**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan – ENSAE - INSEE

---

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail du candidat, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

Le sujet comporte 10 pages.

SUJET :

Le salaire n'est-il que le prix du travail ?

**Tournez la page S.V.P.**

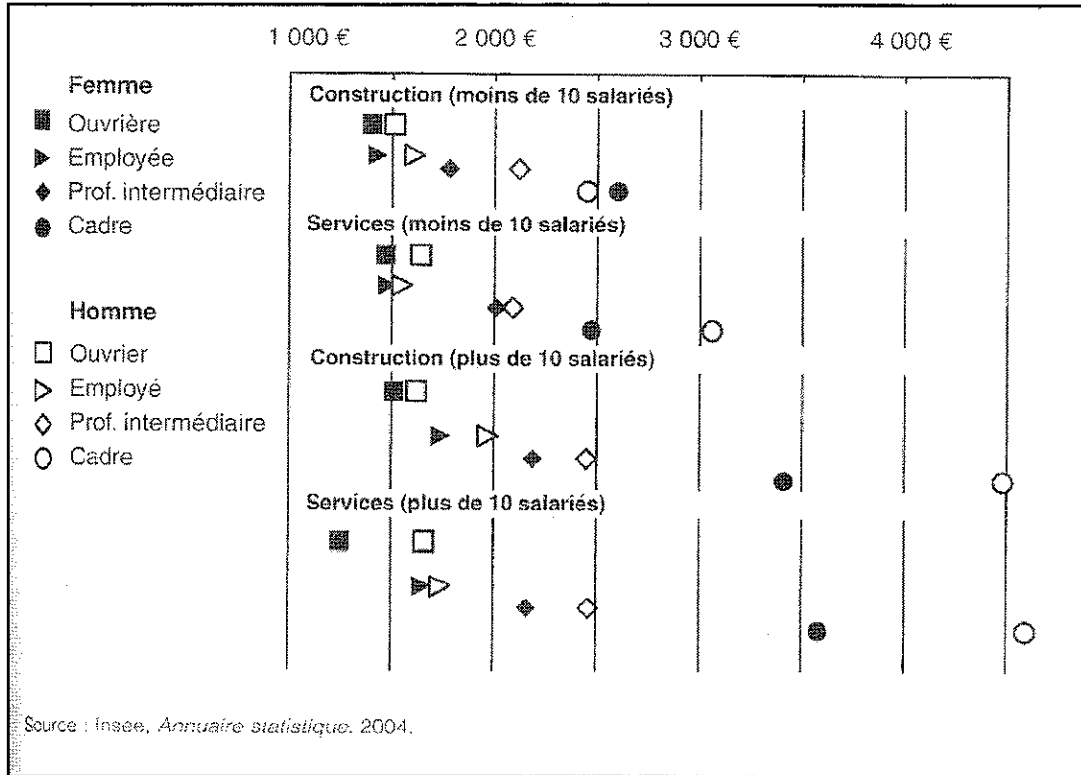
## Document 1

Georg SIMMEL, *Philosophie de l'argent*, Paris, PUF, 1987, pp. 422-423  
(édition originale : *Philosophie des Geldes*, 1900)

Le salaire aux pièces [...] semblerait, mieux que le salaire horaire, correspondre au progrès de la civilisation monétaire tel que nous l'avons caractérisé jusqu'à présent. En effet, le salaire horaire est, beaucoup plus que le salaire aux pièces, proche de cette prise en service de l'être humain tout entier, avec toutes ses énergies rassemblées mais impossibles à déterminer en toute exactitude : le second rémunère la prestation particulière, bien déterminée, complètement extériorisée et objectivée, séparée de l'être humain. Toutefois, présentement, le salaire horaire est en général plus favorable au travailleur (en dehors des cas où certaines conditions techniques, par exemple la modification rapide des machines dans le sens d'un accroissement de la productivité, parlent en faveur du salaire aux pièces) ; et plus favorable justement parce que la rémunération ici ne s'aligne pas avec la même rigueur sur la performance, que dans le salaire aux pièces : dans le salaire horaire la rémunération demeure constante, même si des pauses, des ralentissements ou des erreurs viennent altérer de quelque manière ces résultats. Ainsi donc le salaire horaire paraît plus digne de l'homme, car il présuppose une confiance plus grande et accorde dans le travail tout de même un peu plus de liberté effective que le salaire aux pièces, bien que (disons plutôt ici : parce que) l'homme entre tout entier dans le rapport de travail, ce qui adoucit le caractère impitoyable du critère purement objectif. On peut voir un degré plus élevé de ce rapport dans l'« emploi » : ici la prestation particulière fournit encore bien moins le critère direct de la rémunération, les prestations étant payées globalement, en incluant tous les risques d'insuffisances humaines. Cela se voit le plus clairement dans la situation du haut fonctionnaire d'État, dont le traitement n'a absolument plus aucun rapport quantitatif avec ses prestations particulières, mais doit seulement lui permettre un niveau de vie conforme à sa condition. Quand récemment, en vertu d'une décision de justice, un fonctionnaire prussien qui avait été assez longtemps suspendu pour faute grave se vit retenir une partie du traitement correspondant à cette période, le Tribunal d'Empire annula ce jugement : le traitement d'un haut fonctionnaire en effet n'est pas une contrepartie au *pro rata* des services rendus, mais une « rente » destinée à lui fournir les moyens de subsistance conformes à son état et à sa charge. Ici la rémunération s'aligne donc fondamentalement sur l'élément personnel, à l'exclusion de tout équivalent objectif précis.

## Document 2

*Écart de salaires en fonction de la catégorie socioprofessionnelle, du sexe, de la taille de l'entreprise et du secteur d'activité (salaires mensuels bruts, 2001)*

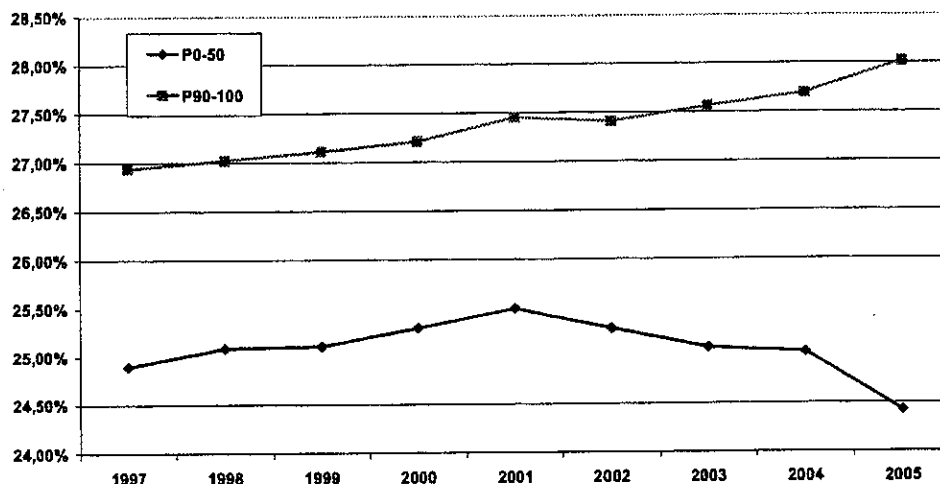


*Extrait de Pierre VOLOVITCH, 2007, « La rémunération du travail », in Jacques FREYSSINET (dir.), *Travail et emploi en France*, Paris, La documentation française, p. 81.*

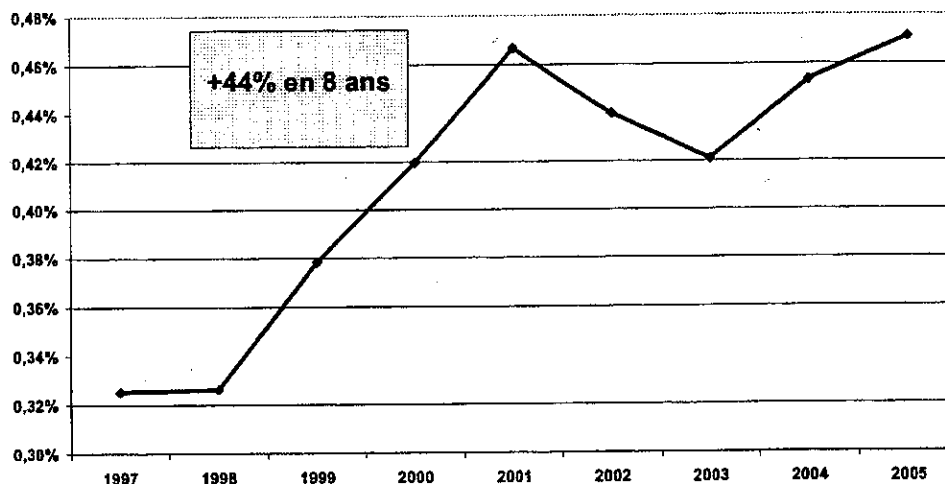
### Document 3

#### Explosion des inégalités de salaires en France entre 1998 et 2006

Part dans l'ensemble des salaires des 50 % des salaires les plus faibles et des 10% des salaires les plus forts



Part des 2 500 salariés les mieux payés (P99,99-100) dans l'ensemble des salaires



**Lecture :** **Champ :** ensemble des individus ayant déclaré une somme positive dans la catégorie « salaires et assimilés » de la déclaration de revenu.

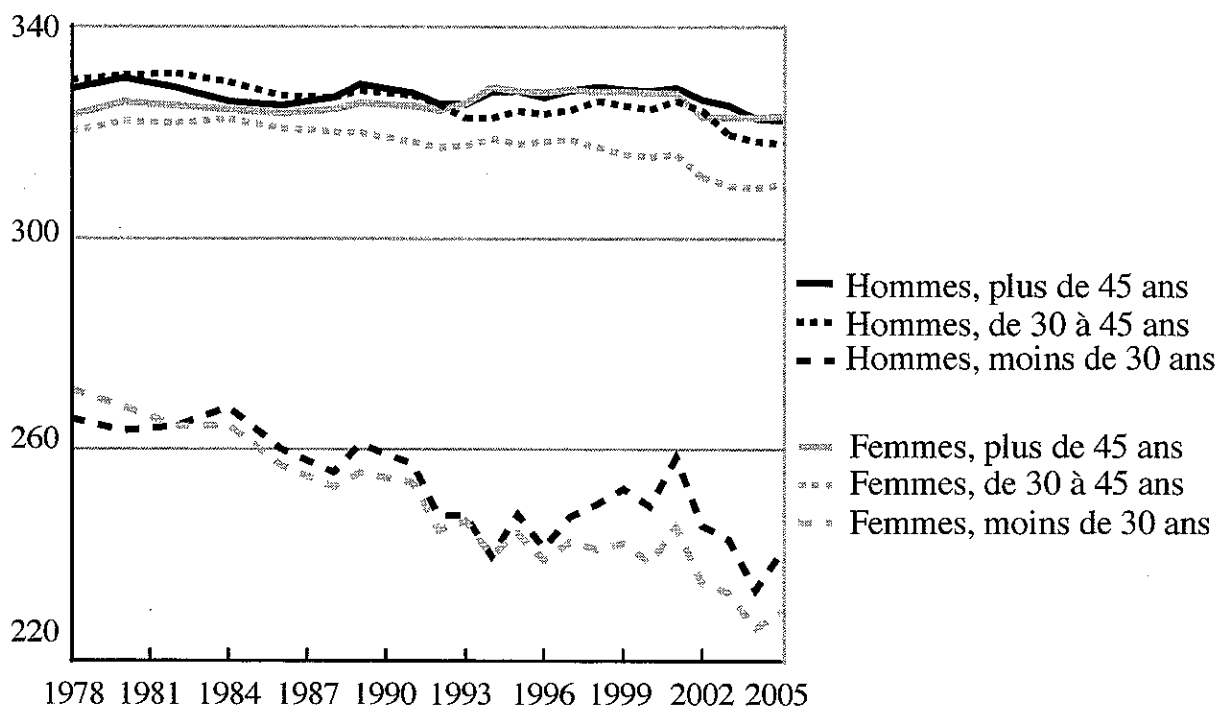
**Note :** Le fractile P90-100 correspond aux 10 % des salariés ayant les salaires les plus élevés (2,5 millions sur les 25 millions de salariés et assimilés) ; le fractile P0-50 correspond aux 50 % des salariés ayant les salaires les moins élevés ; le fractile P99,99-100 correspond aux 0,01 % des salariés les mieux payés (2 500 salariés sur 25 millions).

**Source :** Camille LANDAIS, 2007, *Les hauts revenus en France (1998-2006) : une explosion des inégalités ?*, Paris School of Economics, Document de travail, p. 20.

## Document 4

### Nombre moyen de jours rémunérés par sexe et âge

#### Nombre moyen de jours rémunérés par sexe et âge



Champ : tous salariés.

Source : Insee, DADS exploitation au 1/25.

*Extrait de Romain AEBERHARDT, Julien POUGET, Anne SKALITZ, 2007, « Le revenu salarial et ses composantes, évolution et inégalités de 1978 à 2005 », in INSEE, Les salaires en France, Paris, INSEE, p. 39.*

**Document 5**  
*L'inégalité des salaires dans l'OCDE*

**L'inégalité des salaires dans l'OCDE en 2004 mesurée par le ratio P90/P10**

Suède	2,3	Autriche	3,2
Finlande	2,4	Royaume-Uni	3,5
Danemark	2,6	Irlande	3,6
Pays-Bas	2,9	Canada	3,7
Japon	2,9	Pologne	4,2
France	2,9	Hongrie	4,5
Allemagne	3,1	États-Unis	4,9

*Lecture* : en Allemagne, pour faire partie des 10 % des salariés les mieux payés, il faut gagner 3,1 fois plus que pour faire partie des 10 % des salariés les moins bien payés.

*Source* : OCDE, *Base de données sur les statistiques de l'emploi* : « Distribution des rémunérations brutes des salariés à temps plein », 2007.

## Document 6

Jean SAGLIO, 1999, « Les fondements sociaux des hiérarchies salariales en France », *Travail et emploi*, n° 78, pp. 23-26.

Même lorsqu'ils affirment se livrer à des négociations qui relèveraient du pur marchandage, les acteurs sociaux, quand ils se confrontent pour déterminer les salaires, se réfèrent le plus souvent à des normes collectivement admises. On peut en prendre pour exemple ces deux observations issues d'enquêtes sur le terrain auprès de dirigeants d'entreprise. Dans chacun des cas, la référence explicite est bien la « loi du marché » qui serait censée donner l'information sur le montant du salaire. Mais dans l'un comme dans l'autre cas, il apparaît derrière cette affirmation que ce n'est pas exactement le libre marché des économistes classiques qui est visé par une telle dénomination.

*Q. : ...et pour fixer les salaires lors de l'embauche, comment procédez-vous ?*

*R. : Vous savez, pour nous le salaire, c'est la loi du marché.*

*Q. : Et qui vous dit le prix du marché ?*

*R. : Ben, je téléphone à XXX [l'un des leaders patronaux locaux]. »*

(extrait d'entretien avec un patron de PME de la zone d'Oyonnax)

*« Il paraît impensable à certains patrons que la loi du marché puisse bénéficier aux salariés. En témoigne par exemple cette réflexion du président de la Commission sociale de la Chambre syndicale des industries métallurgiques du Rhône : "il y a une telle rareté d'ouvriers professionnels qu'ils sont payés nettement au-dessus de la loi normale du marché." »<sup>1</sup>*

Il y a donc bien, dans ces discours patronaux comme dans tant d'autres, des références implicites à une norme, qu'ils identifient comme « la loi du marché ». La transaction à laquelle ils se livrent est bien une transaction marchande, mais elle se fonde sur des règles ou des normes, implicites ou explicites. On peut reprendre, pour qualifier l'efficacité sociale de telles normes, la remarque que faisait en 1915 un rédacteur du Ministère du Travail à propos des bordereaux de salaire du début du siècle : ils « font connaître un cours des salaires, une durée normale du travail fondés sur la pratique et le consentement général et dont chacun, patron et ouvrier, sait qu'ils représentent la durée normale, le cours régulier pour la région. Patrons et ouvriers les prennent tout naturellement pour base de leurs contrats, et même lorsqu'ils s'en écartent, en subissent l'influence régulatrice ».

On appellera ici ordre salarial ces ensembles de normes sociales auxquels les acteurs font référence lorsqu'ils cherchent à évaluer les niveaux de salaires proposés ou admis. Les avenants classification des conventions collectives de branche en font tout naturellement partie, tout comme les diverses grilles de statut de la fonction publique. Les uns comme les autres contiennent tout d'abord des nomenclatures qui permettent de définir les postes et donc de créer, dans l'ensemble des postes de travail, des classes d'équivalence (« tel poste est identique à tel autre »). Ils contiennent en second lieu des classements ordinaux, définissant quel type de postes est supérieur à tel autre. Le plus souvent, ces textes contiennent encore des classements cardinaux, définissant les niveaux de revenus – effectifs ou minima – affectés à chacun d'entre eux, au moins de façon relative. Enfin notons que de tels textes peuvent encore comporter la définition des principes qui gouvernent les définitions et les classements en question.

---

<sup>1</sup> J. Bunel, J. Saglio, 1976, *La société des patrons, contribution à l'analyse du système français de relations professionnelles, le cas Rhône-Alpes*, Rapport CORDES, p. 370 (note).



## Document 7

### Proportion de salariés rémunérés sur la base du SMIC

en %

	au 1er juillet 2006	
	Total	dont à temps partiel (en % de l'effectif à temps partiel)
Industries agroalimentaires	22,1	51,3
Industries des biens de consommation	11,1	22,9
Industrie automobile	2,5	4,6
Industries des biens d'équipement	5,4	14,1
Industries des biens intermédiaires	10,3	19,5
Énergie	0,5	1,1
Construction	11,8	27,3
Commerce	20,9	40,3
Transports	9,5	15,3
Activités financières	2,0	4,9
Activités immobilières	15,8	28,7
Services aux entreprises	14,1	41,3
Services aux particuliers	36,2	51,8
Éducation, santé, action sociale	10,7	17,0
Activités associatives	17,5	25,2
<b>Ensemble</b>	<b>15,1</b>	<b>34,5</b>

**Champ** : ensemble des salariés, sauf apprentis, État et collectivités locales, secteur agricole, intérim et secteur domestique.

**Source** : Ministère du Travail, des Relations sociales et de la Solidarité, Dares, enquête Acemo.

## Document 8

### *La satisfaction par rapport au salaire*

Tableau 1

**La satisfaction par rapport au salaire**

En %

	Femmes	Hommes
Très bien payé	1,2	1,3
Plutôt bien payé	9,5	9,9
Normalement payé	48,0	45,9
Plutôt mal payé	34,6	33,9
Très mal payé	6,7	9,0

*Lecture : réponses à la question « Compte tenu du travail que vous fournissez, diriez-vous que vous êtes très bien payé, plutôt bien payé, ... ? ».*

*Source : Travail et modes de vie, 1997, Insee.*

Tableau 2

**La reconnaissance dans son travail**

En %

	Oui	Non	Total
Très bien payé	83,3	16,7	100,0
Plutôt bien payé	74,7	25,3	100,0
Normalement payé	72,1	27,9	100,0
Plutôt mal payé	58,9	41,1	100,0
Très mal payé	51,3	48,7	100,0

*Lecture : réponses à la question « Vous arrive-t-il d'éprouver dans votre travail l'impression d'être reconnu à votre juste valeur ? », en fonction de la réponse à la question sur le salaire.*

*Source : Travail et modes de vie, 1997, Insee.*

Tableau 3

**Le sentiment ou non d'être exploité**

En %

	Oui	Non	Total
Très bien payé	13,3	86,7	100,0
Plutôt bien payé	17,7	82,3	100,0
Normalement payé	24,9	75,1	100,0
Plutôt mal payé	58,7	41,3	100,0
Très mal payé	84,2	15,7	100,0

*Lecture : réponses à la question « Vous arrive-t-il d'éprouver dans votre travail le sentiment d'être exploité ? », en fonction de la réponse à la question sur le salaire.*

*Source : Travail et modes de vie, 1997, Insee.*

Extrait de Olivier GODECHOT, Marc GURGAND, 2000, « Quand les salariés jugent leur salaire », *Économie et statistique*, n° 331, pp. 4-6.

## Document 9

**Francine AIZICOVICI, « L'individualisation des salaires sous le feu des critiques »,  
*Le Monde*, supplément de « l'Économie », 22 janvier 2008, p. 8.**

Augmentations de salaire ou primes individuelles attribuées « à la tête du client », aux « fayots » ou « par copinage », sur la base de critères « opaques », voire « sans explications » données à ceux qui les reçoivent comme à ceux qui en sont écartés : l'analyse d'une vingtaine d'audits de climat social menée par le cabinet SRM Consulting met à mal la pratique très en vogue des salaires au mérite, supposée motiver le personnel et ainsi améliorer la performance des entreprises. Si certaines des personnes interrogées au cours de ces audits se disent satisfaites de ce système, il ressort cependant de cette étude qualitative, publiée le 10 janvier par l'Agence emploi formation (AEF), que sa mise en oeuvre a des progrès à faire. Elle « suscite fréquemment de violents mécontentements, au point parfois de constituer l'une des causes majeures de détérioration du climat social », peut-on lire dans ce document. Les salariés non augmentés seraient, dans certaines entreprises, les « grandes gueules », ceux qui sont « mal vus » ou encore ceux qui ont des arrêts-maladie. On est loin de critères censés être objectifs.

Souvent, le mérite qui [est] supposé être récompensé se confond avec l'ancienneté, souligne encore ce document. Une autre technique répandue est celle dite du « tourniquet » : pour préserver le climat social et parce que l'enveloppe dédiée aux augmentations est faible, chacun la perçoit, mais à tour de rôle, et non par rapport à sa performance. Une pratique qui déçoit ceux qui pensaient la mériter et doivent attendre leur tour. « Le principal problème de l'individualisation est celui de l'équité à l'intérieur des équipes », souligne Philippe Lemistre, économiste au Centre d'études et de recherches sur les qualifications (Céreq-Toulouse) [...]

Pour éviter les zizanies et autres jalousies qui plombent le climat social, il faut agir avec « la plus extrême prudence », recommande le rapport de SRM. Pour Jean-Ghislain de Sayve, directeur régional chez Hay's Management, il faut que la performance soit « réellement mesurable, prenne en compte la qualité du service, et que les règles soient annoncées à tous en début d'année et expliquées à chaque collaborateur ». Ce qui serait loin d'être le cas. Selon Philippe Fontaine, secrétaire national à la CFDT Cadres, « les dérives sont généralisées. Nous sommes d'autant plus critiques que l'on nous a vendu ce système comme étant le meilleur pour augmenter le pouvoir d'achat et améliorer la performance. Or, cela ne s'est pas passé comme ça. On a donné aux managers la capacité d'attribuer des récompenses au mérite mais sans les former, sans investir dans la communication ni dans le choix des critères ».

Pour autant, la CFDT Cadres ne demande pas un retour aux seules augmentations générales, « mais un système mixte (augmentations générales et individuelles), avec des règles du jeu claires et négociées avec les syndicats afin qu'elles soient connues de tous. Mais les directions sont totalement hostiles à de telles négociations ». Selon une étude de la Dares (ministère du travail) publiée en septembre 2007, la tendance est justement au développement de systèmes mixtes, les primes de performance collective étant plus fréquentes. [...]

SESSION 2008

---

**COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan - ENSAE

---

DURÉE : 4 heures

---

L'énoncé comporte 6 pages

*L'usage de la calculatrice est interdit.*

**Tournez la page S.V.P.**

Les deux exercices et le problème qui suivent sont indépendants les uns des autres et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans l'ensemble du présent sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes. *Il est demandé de numérotter soigneusement les réponses.*

Enfin, le jury rappelle qu'il sera fait grand cas de la qualité et de la précision de la rédaction lors de la notation.

## Exercice I

On considère dans cet exercice un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$ , de dimension  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ , et on cherche à caractériser les endomorphismes  $u$  de  $E$  tels que

$$u \circ u = -\text{id}_E$$

où  $\text{id}_E$  désigne l'application identité de  $E$ . On utilisera la notation  $u^2 = u \circ u$ .

1. Soit  $u$  tel que  $u^2 = -\text{id}_E$ . Quelles sont les valeurs propres de  $u^2$ ? L'endomorphisme  $u$  admet-il des valeurs propres?
2. Lorsque  $n = 1$ , montrer que tout endomorphisme de  $E$  est de la forme  $\lambda \text{id}_E$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme  $u$  tel que  $u^2 = -\text{id}_E$  dans ce cas.
3. On considère dans cette question le cas  $n \in \{2, 3, 4\}$  et on suppose, pour commencer, qu'il existe un endomorphisme  $u$  tel que  $u^2 = -\text{id}_E$ . Soit un élément  $x$  de  $E$ , non nul : montrer que  $(x, u(x))$  forme un système libre.  
On pourra par exemple considérer deux réels  $\lambda, \mu$  tels que  $\lambda x + \mu u(x) = 0$  et en tirer que  $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ .
4. En déduire, lorsque  $n = 2$ , une représentation matricielle de tout  $u$  qui vérifie  $u^2 = -\text{id}_E$  ; et préciser alors tous les endomorphismes  $u$  tels que  $u^2 = -\text{id}_E$ .
5. On passe ici au cas  $n = 4$ .
  - (a) On suppose à nouveau, pour commencer, qu'il existe  $u$  tel que  $u^2 = -\text{id}_E$  et on considère un élément  $x$  de  $E$ , non nul. Montrer qu'il existe un élément  $y$  de  $E$  tel que  $(x, u(x), y, u(y))$  forme une base de  $E$ .
  - (b) Préciser alors tous les endomorphismes  $u$  tels que  $u^2 = -\text{id}_E$ .
6. Montrer que si pour  $n = 3$ , il existait un endomorphisme  $u$  sur  $E$  tel que  $u^2 = -\text{id}_E$ , alors il existerait un système libre à quatre éléments dans  $E$ . En déduire qu'il n'existe donc pas de tel endomorphisme.

## Exercice II

On considère dans tout l'exercice quatre variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3, X_4$  indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , avec  $p \in [0, 1]$ . On note  $M$  la matrice (aléatoire)

$$M = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{bmatrix}.$$

1. Combien de valeurs la matrice  $M$  peut-elle prendre ?  
Déterminer également la probabilité que  $M$  soit la matrice nulle.
2. On veut calculer la probabilité  $q$  que  $M$  soit inversible.
  - (a) Calculer  $q$  lorsque  $p = 0$  ou  $p = 1$ .
  - (b) Soit  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1\}$ . Prouver que la matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}$$

est de rang 2 si et seulement si aucune de ses colonnes n'est nulle et que les deux colonnes sont différentes.

- (c) Montrer alors que la probabilité  $q$  que  $M$  soit inversible vaut  $q = 2p^2(1-p^2)$ .
  - (d) En déduire que  $q \leq \min\{p, 1/2\}$ .  
On pourra commencer par prouver que  $x(1-x) \leq 1/4$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
3. On considère maintenant une suite  $X_1, X_2, X_3, \dots$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ ; et pour tout entier  $k \geq 1$ , on note

$$M_k = \begin{bmatrix} X_{4(k-1)+1} & X_{4(k-1)+3} \\ X_{4(k-1)+2} & X_{4(k-1)+4} \end{bmatrix}.$$

Par exemple,  $M_1 = M$  et

$$M_2 = \begin{bmatrix} X_5 & X_7 \\ X_6 & X_8 \end{bmatrix}.$$

- (a) Montrer que  $M_1 M_2 \dots M_n$  est inversible si et seulement si chacune des matrices  $M_j$  l'est, pour  $j = 1, \dots, n$ .
- (b) Déterminer, pour tout entier  $n \geq 1$ , la probabilité que  $M_1 M_2 \dots M_n$  soit inversible. Indiquer la limite de cette probabilité quand  $n \rightarrow \infty$ .

## Problème

On note, pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$k! = k \times (k-1) \times \dots \times 2 \times 1 ;$$

par convention,  $0! = 1! = 1$ . On définit le coefficient combinatoire  $C_n^k$  pour deux entiers  $n \geq 1$  et  $k \in \{0, \dots, n\}$  comme

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

On a alors la formule du binôme : pour tous nombres complexes  $x$  et  $y$  et tout entier  $n \geq 1$ ,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} .$$

Enfin, on rappelle la formule de Moivre : pour tout réel  $\theta$  et tout entier  $n \geq 1$ ,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} .$$

### Partie 1 (préliminaires)

1. Montrer que pour tout réel  $\theta$ , on a  $\cos(2\theta) = 2(\cos \theta)^2 - 1$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 0$  et tout réel  $\theta$ ,

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} ((\cos \theta)^2 - 1)^k$$

où  $\lfloor n/2 \rfloor$  est la partie entière inférieure de  $n/2$ , *id est*, le plus grand entier inférieur ou égal à  $n/2$ .

3. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a  $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$ .

### Partie 2 (introduction des polynômes objets de l'étude)

On considère dorénavant l'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  des fonctions polynômiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  à coefficients réels ; c'est-à-dire que pour toute fonction  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , il existe un entier naturel  $n \geq 0$  et  $n+1$  réels  $a_0, \dots, a_n$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n .$$

On rappelle que le plus petit entier  $n$  tel que l'écriture ci-dessus soit valable est appelé le degré de  $P$ , et que le coefficient  $a_n$  correspondant est le coefficient dominant de  $P$ . Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on note alors  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Montrer que  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{R}_n[X]$  sont deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ ; rappeler la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$  (on ne demande pas de redémontrer la valeur de cette dimension).
2. Exhiber un élément  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que pour tout réel  $\theta$ , on a  $\cos(2\theta) = P(\cos \theta)$ ; indiquer son degré et son coefficient dominant.
3. De manière plus générale, soit  $n \geq 0$  un entier naturel. Donner un élément  $P_n$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que pour tout réel  $\theta$ , on a  $\cos(n\theta) = P_n(\cos \theta)$ .
4. On fixe dans cette question un entier naturel  $n \geq 0$ . Montrer que s'il existe un autre  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que pour tout réel  $\theta$ , on a  $\cos(n\theta) = Q(\cos \theta)$ , alors  $Q = P_n$ .

On peut donc dorénavant parler, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , de l'unique fonction polynômiale  $P_n$  vérifiant que pour tout réel  $\theta$ , on a  $\cos(n\theta) = P_n(\cos \theta)$ .

5. Expliciter  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .
6. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2x P_n(x).$$

7. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $P_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $2^{n-1}$ .
8. Montrer que  $(P_0, \dots, P_n)$  forme une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Partie 3 (étude des variations de ces polynômes)

On fixe, dans cette partie et les suivantes, l'entier  $n \geq 1$  et on notera donc  $P$  le polynôme  $P_n$  défini dans la partie précédente.

Pour tout entier naturel  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , on pose

$$r_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right);$$

et pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on note  $r'_k = \cos(k\pi/n)$ .

1. Montrer que les  $r_k$  sont exactement les racines de  $P$ .
2. Prouver (sans calculs supplémentaires) que la dérivée  $P'$  de  $P$  s'annule exactement  $n-1$  fois sur  $\mathbb{R}$ , et ceci uniquement sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .
3. Montrer que les racines de  $P'$  sont données par certains des  $r'_k$  (préciser lesquels). On pourra montrer au préalable que  $\theta \mapsto P(\cos \theta)$  est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Que valent les  $P(r'_k)$ ?
5. Montrer finalement que  $|P|$  admet un maximum sur  $[-1, 1]$ , et qu'il est donné par

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| = 1.$$



## Partie 4 (approximation d'une fonction régulière)

On fixe  $n$  réels de  $[-1, 1]$ , deux à deux distincts, et on les note  $u_1, \dots, u_n$ . Pour tout entier  $m \in \{1, \dots, n\}$ , on définit la fonction  $L_m$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_m(x) = \frac{x - u_1}{u_m - u_1} \dots \frac{x - u_{m-1}}{u_m - u_{m-1}} \frac{x - u_{m+1}}{u_m - u_{m+1}} \dots \frac{x - u_n}{u_m - u_n} = \prod_{k \neq m} \frac{x - u_k}{u_m - u_k}.$$

On fixe également une fonction  $f$  de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable  $n$  fois, et dont la dérivée  $n$ -ième, notée  $f^{(n)}$ , est continue.

1. Montrer que pour tous entiers naturels  $m$  et  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a  $L_m(u_j) = 1$  si  $j = m$  et  $L_m(u_j) = 0$  sinon.
2. Montrer que  $(L_1, \dots, L_n)$  forme une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
3. Montrer qu'il existe un unique  $Q$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que pour tout entier  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $Q(u_k) = f(u_k)$ . (On pourra écrire  $Q$  sur la base des  $L_m$ .)
4. On veut montrer que pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ , il existe  $c$  dans  $[-1, 1]$  tel que

$$f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{1 \leq k \leq n} (x - u_k).$$

- (a) Montrer que c'est vrai lorsque  $x$  est l'un des  $u_k$ .
- (b) On suppose dorénavant que  $x$  n'est pas l'un  $u_k$  et on définit  $g_x$  de la manière suivante : pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$g_x(t) = f(t) - Q(t) - (f(x) - Q(x)) \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{t - u_k}{x - u_k}.$$

Montrer que la dérivée  $n$ -ième de  $g_x$  existe et la calculer ; on la note  $g_x^{(n)}$ .

- (c) Trouver  $n + 1$  points où  $g_x$  s'annule.
  - (d) Montrer qu'il existe un point  $c$  de  $[-1, 1]$  tel que  $g_x^{(n)}(c) = 0$  et conclure à la propriété recherchée.
5. Montrer alors que

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - Q(x)| \leq \frac{1}{n!} \left( \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| \right) \left( \max_{x \in [-1, 1]} |U(x)| \right)$$

où la fonction  $U$  est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} (x - u_k).$$

## Partie 5 (meilleure approximation au sens précédent)

On aimerait avoir la meilleure approximation uniforme possible de  $f$  par  $Q$ , et la partie précédente montre qu'il s'agit de chercher les  $u_k$  tels que

$$M_U = \max_{x \in [-1,1]} |U(x)|$$

soit le plus petit possible. On va introduire pour l'étude la fonction réelle  $R$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - r_k) .$$

(On rappelle que les  $r_k$  ont été définis à la partie 3.)

1. Montrer que le maximum  $M_R$  de  $|R|$  existe sur  $[-1, 1]$  et vaut  $2^{1-n}$ .
2. Prouver que  $U - R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
3. Supposons que l'on ait choisi les  $u_k$  de telle sorte que  $M_U < 2^{1-n}$ .
  - (a) Montrer que  $U(r'_k) - R(r'_k)$  est strictement positif lorsque  $k$  est impair et strictement négatif sinon.
  - (b) En déduire que  $U = R$ , et que donc un tel choix des  $u_k$  n'existe pas.
4. Quel est, au final, un choix des  $u_1, \dots, u_n$  minimisant  $M_U$  ?

SESSION 2008

---

**COMPOSITION DE PHILOSOPHIE**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines - Cachan

---

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

Le monde des images.

SESSION 2008

---

**COMPOSITION FRANÇAISE**

---

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines

---

DURÉE : 6 heures

---

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

Commentez et discutez ces propos de Florence Dupont, dans *Aristote ou le vampire du théâtre occidental* (Paris, Flammarion, 2007) : « Le théâtre n'a rien à voir avec la littérature, quoi qu'on fasse pour l'y réduire ».

Vous illustrerez votre réflexion par des exemples précis.