

STAGE DE RECHERCHE MASTER 2 PAR PIERRE ADROGUER

EFFET HALL QUANTIQUE DE SPIN

AVRIL - JUILLET 2009



“...the paradox is only a conflict between reality and your feeling of what reality ought to be.”

Richard Feynman, in *The Feynman Lectures on Physics, vol III*

MAITRE DE STAGE :

DR. D. CARPENTIER, Laboratoire de physique, ENS LYON



Résumé

Bien que la mécanique quantique ait maintenant un siècle d'existence, elle est loin d'avoir livré tous ses secrets, et la compréhension des lois qui régissent le comportement au niveau atomique des objets qui nous entourent ; bien que la mécanique quantique soit extrêmement précise pour décrire le comportement d'objet isolé (état d'excitation d'atomes ou de molécules), le grand nombre de particules qui entrent en interaction dans les objets macroscopique ont des effets qui ne sont pas encore tous connus.

La branche de la physique qui s'intéressent aux phénomènes macroscopiques dus à la mécanique quantique est la physique de la matière condensée ; cette branche se développe depuis les années 50 et 60. Ainsi les physiciens ont eu le temps de s'habituer aux concepts et aux outils nécessaires à la compréhension de cette physique, mais sa relative jeunesse fait que de vastes problèmes restent ouverts et à défricher.

L'objet de ce stage, l'effet Hall quantique de spin, est un de ces sujets nouveaux qui suscitent chez les physiciens un vif intérêt. Nous nous proposons ici d'expliquer ce qu'il a de véritablement neuf, de montrer en quoi il est digne d'intérêt et enfin nous donneront quelques résultats sur le sujet, dont certains nouveaux.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 3 |
| 1.1 | Effets Hall quantique | 3 |
| 1.2 | Description de l'effet QSH | 3 |
| 1.2.1 | Modèle proposé | 4 |
| 2 | Obtention des états de bords dans le cas de l'effet Hall quantique de spin | 6 |
| 2.1 | Etats de <i>bulk</i> et de bords dans le cas sans champ magnétique . . | 6 |
| 2.2 | Introduction d'un champ magnétique orthogonal | 8 |
| 2.2.1 | Relation de dispersion des états de bord | 9 |
| 3 | Formalisme de Landauer-Buttiker appliqué à l'effet Hall quantique de spin | 11 |
| 3.1 | Etats de bord dans l'effet Hall quantique | 11 |
| 3.1.1 | Conductance de Landauer | 13 |
| 3.2 | Formalisme de Büttiker pour l'effet Hall quantique | 14 |
| 3.3 | Application à l'effet Hall quantique de spin | 16 |
| 3.3.1 | Sondes ferromagnétiques | 18 |
| 4 | Conclusions | 19 |
| | Bibliographie | 20 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Effets Hall quantique

L'effet Hall quantique de spin (*Quantum Spin Hall effect, QSH*) est un nouvel état de la matière, qui a été prédit théoriquement très récemment (dans les années 2000) par Kane et Mele [3] et dont la mise en évidence expérimentale vient d'avoir lieu. La caractéristique la plus remarquable de l'effet Hall de spin est qu'un barreau dans cet état soumis à une différence de potentiel verrait les électrons de spin up s'accumuler d'un côté et ceux de spin down de l'autre, on pourrait ainsi trier les électrons selon leur spin, et ce en l'absence d'impuretés magnétiques ; l'effet Hall quantique de spin étant alors l'analogue de l'effet Hall quantique par rapport à l'effet Hall : une manifestation à l'échelle macroscopique d'effets quantiques.

Cependant, tout comme dans le cas de l'effet Hall quantique, tous les matériaux ne sont pas susceptibles de produire un tel effet. Dans le cadre de l'effet Hall quantique, on considère des semi-conducteurs soumis à un fort champ magnétique transversal, présentant un gap en énergie entre les bandes de valence et bandes de conduction des électrons piégés à l'interface entre deux semi-conducteurs. Les électrons au cœur du matériau sont alors sur des orbites quasi-circulaires (de manière semi-classique), et ne peuvent conduire du courant, même en présence d'une différence de potentiel. Cependant, le champ magnétique brise l'invariance par renversement du temps, et permet alors aux électrons près des bords de l'échantillon de se déplacer dans une direction privilégiée ; on obtient alors un isolant qui a la possibilité de transmettre un courant. Nous étudierons plus en détail cet effet dans la section 3.1.

L'aspect novateur de l'effet QSH est qu'il apparait en l'absence de champ magnétique, il n'y a donc pas de brisure de symétrie par renversement du temps, c'est d'ailleurs ceci qui permet d'obtenir des directions de propagation opposées pour les différents spin ; en effet, lors de cette symétrie, les spins up se changent en spin down et vice versa ; ils ne peuvent donc avoir que des vitesses opposées.

1.2 Description de l'effet QSH

Avant que les premières expériences s'intéressant à l'effet QSH se déroulent, deux options s'affrontaient concernant le choix du matériau le plus à même de

montrer son existence. Certains, Kane et Mele [3] en tête de file, pensaient que le graphène, bien que connu comme un bon conducteur, pourrait sous l'effet de couplage spin-orbite, ouvrir un gap en énergie, créant ainsi seulement des états de bords. L'autre option, proposée par Zhang, Bernevig et Hughes [1] est la création de puits quantiques semi-conducteurs de CdTe/HgTe/CdTe.

Il semblerait que la position soutenue par Kane et Mele était trop audacieuse, les effets de spin-orbite n'étant pas assez fort pour contraindre les électrons à se déplacer seulement près des bords. *A contrario*, Zhang, en compagnie de Molenkamp [4], a donné un protocole expérimental pour la création de ces puits, la manipulation de HgTe étant très difficile, protocole qui a été suivi pour *in fine* observer l'effet [5]. Nous allons donc nous concentrer sur leurs travaux et utiliser leur modèle pour comprendre cet effet, et essayer de pousser plus loin leurs résultats.

1.2.1 Modèle proposé

Il s'agit de créer un puits quantique dans un "sandwich" de semi-conducteurs CdTe/HgTe/CdTe dans lequel les bandes de conduction et de valence sont inversées entre les deux composants, et en variant l'épaisseur de la "tranche" de HgTe, on peut intervertir les bandes dominantes en énergie. Ils monteront ainsi qu'en deçà d'une épaisseur d_c , le système est dans un état "normal" de semi-conducteur, et au-delà, il bascule dans la phase QSH.

L'étude des bandes de conduction et de valence, ainsi que de l'épaisseur de transition de phase qu'ils ont produites[4] permettent de simplifier drastiquement l'hamiltonien. En effet, leur hamiltonien de départ, considérant le problème des différentes bandes d'énergie des électrons est une matrice de taille 6*6, qu'ils réduisent à une matrice 4*4 dans un premier temps grâce à des considérations d'énergies, hamiltonien qui, via des arguments de symétries (spatiales et par renversement du temps) se réduit à une matrice de la forme :

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \begin{pmatrix} H(\vec{k}) & 0 \\ 0 & H^*(\vec{k}) \end{pmatrix} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}$$

Nous n'avons pas repris leur travaux et avons décidé de travailler uniquement à partir de ce modèle qu'ils ont proposé. Dans ce modèle, l'hamiltonien est diagonal par bloc, chacun des blocs correspondant à une seule direction de spin (*up* ou *down*). Nous étudierons donc seulement la matrice H , puis déduirons par renversement du temps ce qu'il se passe pour les spins *down*.

On peut décomposer notre matrice 2*2 $H(\vec{k})$ sur la base constituée de l'identité et des matrices de Pauli. On simplifie ensuite cette matrice par les mêmes considérations de symétries, ce qui donne :

$$\begin{aligned} H(\vec{k}) &= \epsilon(\vec{k})I_2 + d_i(\vec{k})\sigma^i \\ d_x(\vec{k}) &= Ak_x \\ d_y(\vec{k}) &= Ak_y \\ d_z(\vec{k}) &= M - B(k_x^2 + k_y^2) \end{aligned}$$

Dans le cadre du système étudié, les différents paramètres ont des valeurs

connues [4] A et B sont strictement négatifs, et le signe de M change lors de la variation de l'épaisseur d de la tranche de HgTe autour de d_c .

Chapitre 2

Obtention des états de bords dans le cas de l'effet Hall quantique de spin

2.1 Etats de *bulk* et de bords dans le cas sans champ magnétique

On a vu dans la section précédente que l'étude de l'effet QSH pouvait se résumer à celle de la matrice 2*2 :

$$\begin{aligned}H(\vec{k}) &= \epsilon(\vec{k})I_2 + d_i(\vec{k})\sigma^i \\d_x(\vec{k}) &= Ak_x \\d_y(\vec{k}) &= Ak_y \\d_z(\vec{k}) &= M - B(k_x^2 + k_y^2)\end{aligned}$$

La diagonalisation de cette matrice donne directement une dispersion $E(\vec{k}) = \epsilon(\vec{k}) \pm \sqrt{(M - Bk^2)^2 + A^2k^2}$. Ceci correspond aux états de *bulk*, avec un gap de $2M$ au point $(0,0)$, on voit donc bien qu'aux faibles énergies, ils ne peuvent conduire du courant ; l'essentiel de la conduction étant alors réalisés sur les bords, à condition qu'il existe bien des états de bord.

On va chercher ces états de bord en cherchant des solutions ne s'étendant pas dans tout l'espace. Pour fixer les idées, considérons un échantillon occupant le demi-espace $y > 0$, le reste étant le vide. On cherche donc des solutions proportionnelles à $\exp(ik_x x + \lambda y)$, avec $\lambda < 0$, et pour ceci on effectue la substitution de Peirls : $k_y \longleftrightarrow i\partial_y$.

On trouve alors 4 valeurs de λ possibles pour un état d'énergie E fixée, vérifiant :

$$\lambda^2 = k_x^2 + \underbrace{\frac{A^2 - 2BM}{2B^2}}_F \pm \sqrt{F^2 - \frac{M^2 - E^2}{B^2}}$$

On cherche ensuite des solutions à $E = 0$, $k_x = 0$, ce qui donne comme condition nécessaire pour avoir des solutions à λ réel que $A^2 > 4MB$. Dans ce cas-là, on obtient quatre valeurs de λ , deux positives et deux négatives, dont on ne doit retenir que les négatives. On a :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4MB}}{2B} \quad \lambda_{3,4} = -\lambda_{1,2}$$

Chaque valeur de λ est associé à un spineur, vecteur propre du hamiltonien. Ces spineurs sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda_{1,2}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda_{3,4}$. On doit étudier deux cas, selon le signe de M . En effet, dans le cas des puits quantiques de HgTe, les paramètres A et B sont connus et sont tous deux négatifs [4].

Dans le cas $M > 0$, on doit retenir λ_1 et λ_4 , on a donc

$$\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda_1 y} + \beta e^{\lambda_4 y} \\ -\alpha e^{\lambda_1 y} + \beta e^{\lambda_4 y} \end{pmatrix}$$

. Cependant, les conditions au bord $y = 0$, que l'on choisisse des conditions ouvertes ($\Psi = 0$) ou l'absence de courant traversant l'interface, on obtient $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, le cas $M > 0$ correspond à la phase topologique "classique", celle du semi-conducteur sans état de bord

Inversement, dans le cas $M < 0$, on retient λ_1 et λ_2 , et il est alors possible de satisfaire les conditions au bord. On a alors

$$\Psi(x, y) = \left(\frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_2} \right) (e^{\lambda_2 y} - e^{\lambda_1 y}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ceci correspond à une fonction d'onde s'annulant à l'interface, croissant exponentiellement sur la longueur $\frac{1}{\lambda_1}$ avant de décroître exponentiellement sur la longueur $\frac{1}{\lambda_2}$.

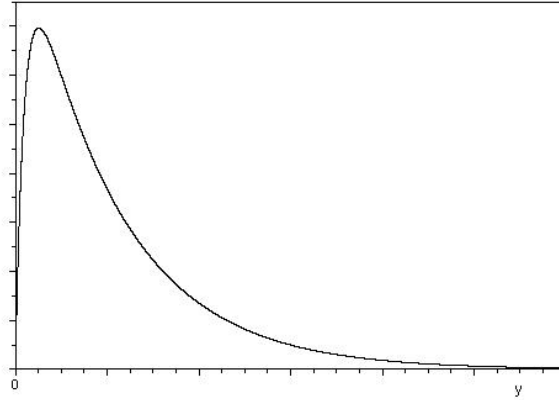


FIGURE 2.1 – Profil selon y de la fonction d'onde des états de bord dans le cas $M < 0$, pour les électrons de spin up.

Ce modèle montre ainsi facilement l'apparition de la phase QSH, lors de la transition entre $M > 0$ et $M < 0$. On voit de plus qu'à $E \neq 0$, le vecteur

donde associé au spin up sera non-nul; par renversement du temps, celui du spin down lui sera opposé. Ainsi on obtient bien deux états de bords de spins opposés et contre propageants. Il est aussi intéressant de voir quel serait l'effet qu'un champ magnétique aurait sur l'hamiltonien et sur ces états de bord afin d'être sûr de leur stabilité, et à cette fin, nous allons simplifier l'hamiltonien en nous concentrant au voisinage de $k_x = 0$, et donc négligeant le terme en k^2 , c'est-à-dire que nous allons fixer $B = 0$.

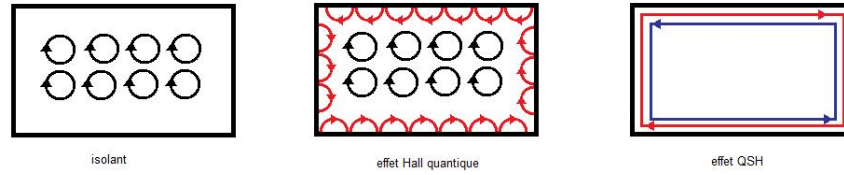


FIGURE 2.2 – Représentations schématiques de différentes phases topologiques connues, de gauche à droite, isolant, effet Hall quantique puis effet Hall quantique de spin

Dans la phase QSH, ceci a pour effet de faire tendre λ_1 vers $-\infty$. On obtient alors une exponentielle décroissante sur la longueur $L = A/M$, il est donc nécessaire de changer les conditions au bord puisque l'exponentielle associée à λ_1 est maintenant totalement concentrée sur le bord et a pour seul effet de "faire coller" la fonction d'onde aux conditions de bord. On obtient donc comme fonction d'onde

$$\Psi(x, y) \propto e^{-y/L} \begin{pmatrix} 1 - \tilde{\delta}(y) \\ -1 + \tilde{\delta}(y) \end{pmatrix}$$

Ici $\tilde{\delta}(y) = 1$ si $y=0$, 0 sinon; par analogie avec ce qu'il se passe ici, on choisira dans nos études futures qu'à la limite $y \rightarrow 0$, $\Psi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme condition au bord.

2.2 Introduction d'un champ magnétique orthogonal

On introduit maintenant un champ magnétique H orienté selon l'axe z . Vu l'invariance du système selon le long de l'axe x , il est naturel de choisir la jauge de Landau, c'est-à-dire un potentiel vecteur $(Hy, 0, 0)$. Les effets dus au champ sont de deux natures, on a ainsi une contribution qui va orienter les spins up et down selon l'axe z , et séparer leurs énergies via le terme en ϵ , qui ne change rien à l'existence des états de bord; et des effets orbitaux, changeant k_x en $k_x - eHy$, c'est cet effet que nous allons étudier. On cherche donc à diagonaliser la matrice :

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} M & A(k_x - eHy - \partial_y) \\ A(k_x - eHy + \partial_y) & M \end{pmatrix}$$

On cherche des solutions de la forme $\begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix}$. On pose $L^2 = \frac{A^2}{M^2 - E^2}$ qui correspond à la longueur L qui apparaissait dans le cas sans champ pour une énergie nulle, et $a = eH$, qui sera le paramètre par rapport auquel on va faire un développement perturbatif. En effet un trop fort champ aura pour effet de casser l'effet Hall quantique de spin, le transformant en effet Hall quantique habituel. La résolution de l'équation aux valeurs propres :

$$\tilde{H} \begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} e^{ik_x x} = E \begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} e^{ik_x x}$$

conduit alors à résoudre le système :

$$g(y) = \frac{A}{M + E} (f'(y) - ayf(y) + k_x f(y))$$

$$f'' - \left(a + \frac{1}{L^2} + (k_x - ay)^2 \right) f = 0$$

En fixant $E = 0$, $k_x = 0$ et $a = 0$, on retombe bien sur une exponentielle décroissante sur la longueur L que l'on avait tout à l'heure, l'exponentielle croissante devant être éliminée pour pouvoir normaliser notre fonction d'onde.

On cherche des solutions à $E = 0$, le cas $E \neq 0$ correspondant juste à un changement de la valeur M , et on regarde alors quelle est la valeur de k_x correspondante. Au premier ordre en a (c'est-à-dire en champ nul), on a vu que la valeur de k_x correspondante est nulle, donc on résout en perturbation notre équation différentielle en posant $f = f_0 + af_1 + \dots$, et en posant $k_x = a\tilde{k}$. Aux deux premiers ordres en a on obtient :

$$f_0'' - \frac{1}{L^2} f_0 = 0$$

$$f_1'' - \frac{1}{L^2} f_1 = f_0$$

On trouve alors $f_0 \propto e^{-y/L}$, $f_1 = -\frac{Ly}{2} e^{-y/L}$. Cependant il faut s'assurer que notre condition au bord, définie dans la section précédente comme $g(0) = -f(0)$, peut être satisfaite. Cette condition est vérifiée seulement pour une valeur de k_x donnée qui dépend de la valeur du champ H : $k_x = aL/2 = \frac{eHA}{2M}$, on obtient ainsi un décalage de la relation de dispersion linéaire au voisinage de $E = 0$, maintenant centré sur une valeur k_H différente de 0.

2.2.1 Relation de dispersion des états de bord

La relation de dispersion des états de *bulk* est facile à connaître, par la diagonalisation de la matrice $H(\vec{k})$, on obtient facilement :

$$E(\vec{k}) = \pm \sqrt{M^2 + A^2 k^2}$$

Il est aussi intéressant d'obtenir la relation de dispersion de états de bord. On sait que les états de bord d'énergie nulle sont réalisés à une valeur donnée de

k_x , qui dépend de la valeur du champ orthogonal H . On étudie alors les petites variations de l'énergie en appliquant notre hamiltonien au spineur vecteur propre de l'hamiltonien d'énergie nulle. On observe alors que l'énergie est au voisinage de k_H , et dans un régime de faible champ magnétique :

$$E(k_x) = -A(k_x - k_H) + o(a)$$

Ainsi, l'introduction du champ magnétique orthogonal H a pour seul effet de "décaler" la relation de dispersion le long des valeurs de k_x sans changer la valeur de la vitesse de Fermi associée à l'électron.

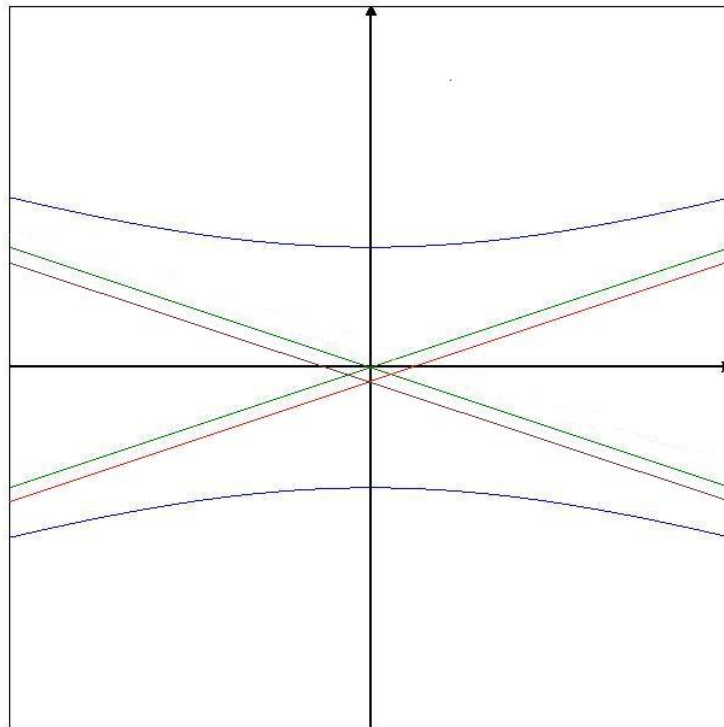


FIGURE 2.3 – Profil de la dispersion des différents états. En bleu, les états de *bulk*, en vert les états de bord sans champ, en rouge avec champ

On a donc réussi à rattacher la présence des états de bords à la condition $M < 0$; cette présence des états de bord nous permet alors de nous concentrer seulement sur la physique les concernant, puisque ce seront les seuls à participer au transport des électrons. On a de plus obtenu le fait que cela correspond à une nouvelle phase topologique : le système n'est ni un isolant, ni un effet Hall quantique dans lequel il y a un seul sens de propagation. Enfin, on a aussi étudié pour la première fois les effets orbitaux sur leur loi de dispersion sous champ orthogonal.

Chapitre 3

Formalisme de Landauer-Buttiker appliqué à l'effet Hall quantique de spin

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'étude de la physique de l'effet QSH se résume à celle des états de bord. Ce qui nous permet d'affirmer ceci sont les travaux effectués sur l'effet Hall quantique habituel que nous nous proposons d'expliquer dans un premier temps, tout en expliquant pourquoi cette simplification est aussi valable pour les états de bord contre-propageants de l'effet QSH.

3.1 Etats de bord dans l'effet Hall quantique

On peut interpréter l'effet Hall comme une déviation des électrons le long de leur parcours : le champ magnétique transversal dévient les électrons de leur parcours en ligne droite et les fait s'accumuler sur un des bords, d'où la création de la tension transversale dite *de Hall*. Cependant cette vision n'est pas satisfaisante pour expliquer la quantification observée à grand champ et faible température. Le domaine dans lequel on entre alors est celui de la physique quantique, la vision classique de l'électron comme une bille soumise à différentes forces n'a plus lieu.

Nous considérerons un gaz d'électron bidimensionnel dans le plan (O,x,y) et travaillerons avec la jauge de Landau, $\vec{A} = (-By, 0, 0)$. On obtient alors pour l'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2m} \left(\left(p_x - \frac{eBy}{c} \right)^2 + p_y^2 \right) + V(y)$$

On prend comme type de solutions $\Psi(x, y) = e^{ikx} \xi_k(y)$, et en posant $\omega_c = |eB|/mc$ la pulsation cyclotron et $y_0 = -\hbar k/m\omega_c$ on obtient comme problème aux valeurs propres :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{m}{2} \omega_c^2 (y - y_0)^2 + V(y) \right) \xi_{k,n} = E_{k,n} \xi_{k,n}$$

On sait aussi grâce aux travaux de Landau que les différents niveaux d'énergie (fortement dégénérés) sont espacés de la valeur $\hbar\omega_c$, ce sont les *niveaux de Landau*. Ainsi, sur une portion où les amplitudes de $V(y)$ sont faibles par rapport à cette échelle d'énergie, on peut les supposer nulles, et on trouve alors l'oscillateur harmonique dont on connaît les solutions $E_{k,n} = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, qui ne dépendent pas de k , ni de y_0 . Cependant, on ne peut plus utiliser cette vision lorsqu'on se rapproche des bords, où le potentiel de confinement se fait sentir plus fortement. Classiquement, les bords perturbent les orbites cyclotron et les transforment en "orbites sautantes", où les électrons "ricochent" contre les bords de l'échantillon. Avec le formalisme quantique on obtient alors une énergie $E_{k,n} = E(n, \omega_c, y_0(k))$. Des profils typiques sont montrés en 3.1.

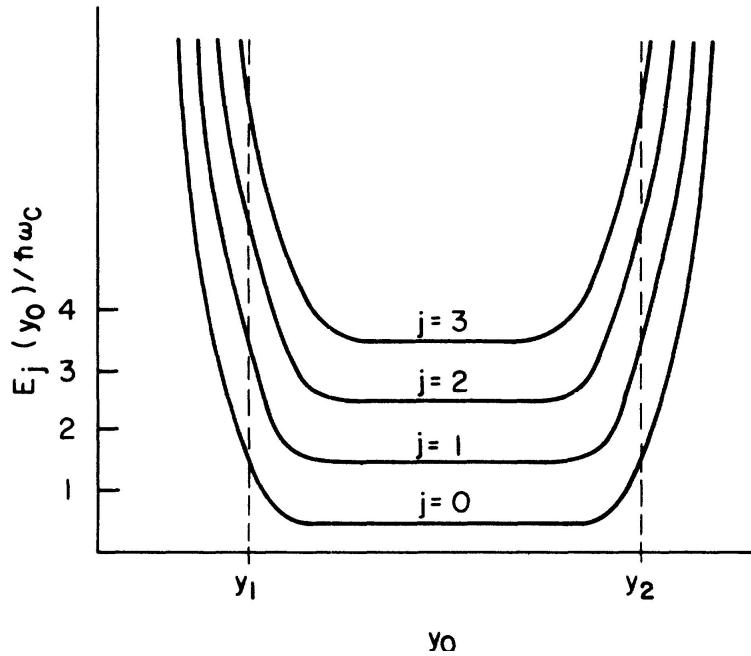


FIGURE 3.1 – Profil de l'énergie propre en fonction du paramètre y_0

La vitesse de groupe correspondante à cette énergie est $v_{k,n} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_{k,n}}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_{k,n}}{dy_0} \frac{dy_0}{dk}$. Ainsi, le long du bord inférieur y_1 , la vitesse est positive, et le long du bord y_2 , elle est négative. De plus, pour la portion centrale, la vitesse de groupe associée est nulle bien que la vitesse des électrons ne l'est pas. On a donc bien montré que seuls les états de bord participent au transport quantique. Cette étude, faite sur un profil de potentiel donné peut s'étendre à toute forme de potentiel, pour peu que les variations de la partie centrale soient faibles par rapport à $\hbar\omega_c \propto B$, ce qui s'obtient en augmentant suffisamment le champ par exemple.

3.1.1 Conductance de Landauer

Nous avons donc vu que le transport quantique se faisait uniquement selon les états de bord. Pour connaître les propriétés électriques du conducteur étudié, nous devons donc connaître la conductance associée à chaque état de bord.

Considérons dans un premier cas un conducteur, mis en contact par un fil parfait avec deux réservoirs à même température et à deux potentiels chimiques différents, $\mu_g = \mu_0 - \frac{eV}{2}$ et $\mu_d = \mu_0 + \frac{eV}{2}$ et calculons sa conductance (on va s'apercevoir qu'elle n'est pas infinie). Le réservoir i injecte dans le conducteur des électrons d'énergie E donnée selon la distribution de Fermi-Dirac (on a posé $\beta_i = (k_B T_i)^{-1}$) :

$$f_i(E) = \frac{1}{e^{\beta_i(E-\mu_i)} + 1}$$

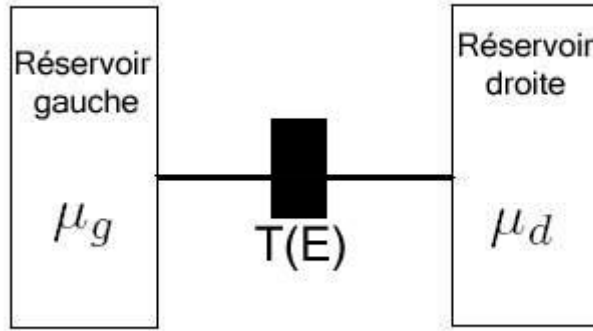


FIGURE 3.2 – Représentation du cas monodimensionnel étudié

La portion de courant d'énergie E allant de gauche à droite est :

$$dI_{g \rightarrow d}(E) = \underbrace{\frac{d\rho_{g \rightarrow d}(E)}{dE} dE}_{\text{Densité d'état}} \quad e v(E) \quad \underbrace{T(E)}_{\text{proba de transmission}} \quad \underbrace{f_g(E)}_{\text{proba d'injection}}$$

Cependant on sait que la vitesse et la densité d'état sont données en fonction du spectre par $v(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}$ et $\frac{d\rho_{g \rightarrow d}(E)}{dE} = \frac{1}{2\pi} \frac{dk}{dE}$, on a donc en simplifiant $v(E) \frac{d\rho}{dE} = \frac{1}{h}$ et retranchant la portion de courant injectée par le réservoir de droite :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e}{h} [f_g(E) - f_d(E)] T(E) dE \simeq \frac{e}{h} \int -eVT(E) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial E}}_{\xrightarrow{T \ll 1} -\delta(E-E_F)} dE \\ &= \frac{e^2}{h} T(E_F) V \end{aligned}$$

Bien que notre approche puisse être qualifiée de semi-classique puisque nous n'avons pas introduit le formalisme de la mécanique quantique, la différence

entre le monde classique et le domaine de la physique quantique apparait clairement sur cet exemple très simple : nous obtenons une conductance maximale de $\frac{e^2}{h}$, même si le conducteur est parfait.

Ce paradoxe est levé lorsqu'on considère plus profondément le calcul qui a été fait : nous avons en fait mesuré la conductance associée à l'ensemble fil + contacts. Ces derniers sont responsables de la dissipation associée, ce qui est visible sur une prise de vue infra-rouge par exemple (échauffement aux points de contact). On associe alors à chaque contact une conductance de $2e^2/h$ (elles sont en série), ce qui permet d'accéder alors à la valeur intrinsèque de la conductance du fil.

3.2 Formalisme de Büttiker pour l'effet Hall quantique

Pour décrire le transport, Büttiker a montré la très grande stabilité des états de bord[2]. En effet, on a vu que les états du bord supérieur se déplacent vers la gauche et ceux du bas vers la droite (par exemple), mais l'on ne sait pas encore si ces états sont couplés par le biais des collisions inélastiques qui ne manqueront pas de se produire dans un échantillon réel (électrons-phonons, électrons-électrons, électrons-ions,...).

Imaginons une impureté assez proche du bord supérieur pour dévier les électrons incidents de la gauche. Nous pouvons nous placer dans un contexte semi-classique car il n'y a qu'une seule échelle d'énergie entrant en jeu, l'énergie cinétique des électrons qui est énorme (proportionnelle au champ). Cette image nous dit alors que l'électron va tourner plus profondément dans le métal. Cependant, si les impuretés sont suffisamment espacées, on obtient qu'il est impossible de renvoyer l'électron vers la gauche sur une longueur supérieure à $l_B = (\hbar c/|eB|)^{1/2}$, la longueur magnétique. C'est cette absence de *backscattering* (diffusion vers l'arrière) à fort champ magnétique qui est responsable de l'effet Hall quantique. Les impuretés au cœur du conducteur, dans la limite où elles sont assez diluées vont donner lieu à des orbites fermées, d'une taille de l_B environ qui ne participent donc pas au transport.

Ainsi, pour toute "boîte" de taille l_B près d'un bord, tous les électrons entrent d'un côté et sortent de l'autre, on observe donc aucune chute de potentiel le long des bords si l'échantillon est large comparé à l_B .

La connaissance de cette propriété des états de bord nous permet alors de s'affranchir du calcul des fonctions propres de l'hamiltonien avec collisions inélastiques et de se concentrer uniquement sur les états de bord, chacun ayant une conductance de e^2/h comme nous l'avons vu que nous pourrions ajouter les unes aux autres.

On généralise le calcul fait pour la formule de Landauer et on montre alors que le courant entrant dans un contact α donné se met sous la forme :

$$I_\alpha = \frac{e^2}{h} \left[(N_\alpha - R_\alpha) \mu_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} T_{\beta \rightarrow \alpha} \mu_\beta \right]$$

Dans cette expression, N_α représente le nombre de canaux de bord, R_α est la probabilité totale de réflexion au contact α et $T_{\beta \rightarrow \alpha}$ la probabilité totale de passage du contact β au contact α (on a donc $R_\alpha + \sum_{\beta} T_{\beta \rightarrow \alpha} = 1$).

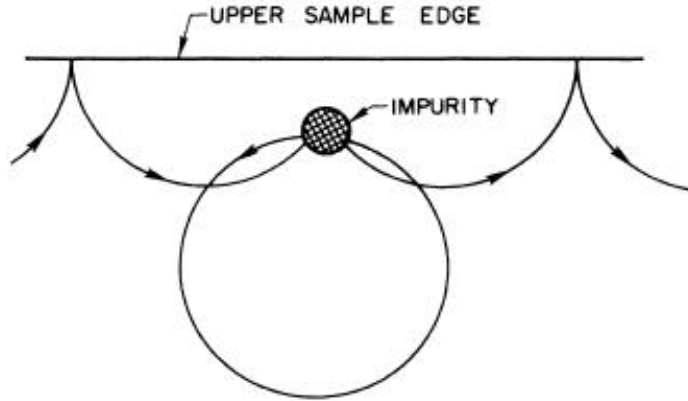


FIGURE 3.3 – Vue quasi-classique des orbites sautantes sur une impureté près d'un bord [2]

Cette relation est résumée par la formule de Landauer multi-contact :

$$I_\alpha = G_{\alpha\beta}\mu_\beta$$

La seule détermination de la matrice de conductance $G_{\alpha\beta}$ donnant toute la physique du transport électronique. Les propriétés bien connus des courants et potentiels (loi des noeuds, invariance de jauge et symétries par renversement du temps) donnent des relations sur les coefficients et permettent d'inverser la matrice. On peut alors retrouver les potentiels aux contacts en fonction du courant qui traverse le conducteur, et ainsi retrouver la quantification de l'effet Hall.

En effet si l'on considère une barre d'effet Hall quantique à 6 contacts, avec un seul état de bord entre deux contacts voisins on obtient d'après les arguments précédents et puisque $N_i = 1$, $R_i = 0$ et $T_{i+1 \rightarrow i} = 1$:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \frac{e^2}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{pmatrix}$$

Cependant, le courant I_6 par exemple est donné pour peu que l'on connaisse les 5 autres par conservation du courant ($\sum_\alpha I_\alpha = 0$), et on peut en outre mesurer tous nos potentiels par rapport à μ_6 puisqu'ils sont définis à une constante additive près et donc se ramener à une matrice diagonale supérieure en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui est inversible. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_6 \\ \mu_2 - \mu_6 \\ \mu_3 - \mu_6 \\ \mu_4 - \mu_6 \\ \mu_5 - \mu_6 \end{pmatrix} = \frac{h}{e^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}$$

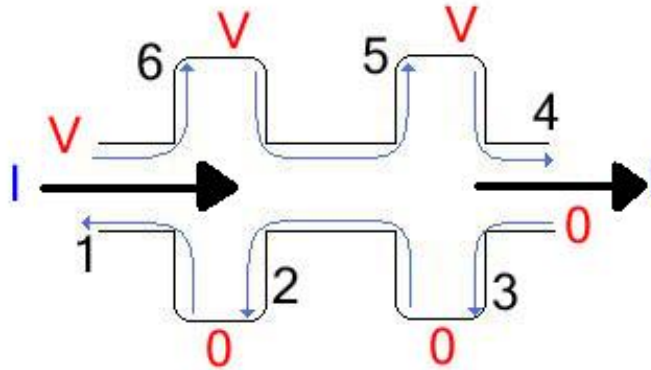


FIGURE 3.4 – Conducteur 6-contacts étudié pour l’effet Hall quantique. On voit bien les isopotentielles le long des états de bord.

En appliquant ceci on trouve alors que le passage d’un courant entre les contacts 1 et 4 (par exemple), met les potentiels 5 et 6 au même potentiel que 1, alors que 2 et 3 sont au potentiel de 4, créant de fait une conductance de Hall de e^2/h . Si l’on suppose que le champ magnétique est tel que ν états de bord se propagent (i.e plus faible), on obtient alors une conductance plus grande, en $\nu e^2/h$.

3.3 Application à l’effet Hall quantique de spin

La puissance du formalisme de Buttiker est qu’il peut être appliqué à toutes les géométries de conducteur, pour peu que l’on connaisse la matrice de conductance. On se situe alors dans une situation quasi uni-dimensionnelle, ce qui correspond bien à ce qui est obtenu pour l’effet Hall quantique : les électrons sont confinés dans un plan à l’interface entre deux semi-conducteurs, mais aussi confinés près des bords sur l’échelle l_B . Par analogie avec l’effet Hall quantique habituel, et puisque nous avons vu qu’il y avait aussi des états de bords uni-dimensionnels dans l’effet QSH, nous allons étendre ce formalisme à ces états de bord contre-propageants dans une barre multi-contacts.

Les cas à deux et quatre terminaux n’apportent pas de différence notable par rapport à l’effet Hall quantique : on obtient seulement la superposition de deux effets Hall quantique à cause du nombre élevé de contraintes pesant sur ces géométries. Cependant, les calculs sur un conducteur à six contacts ont montré des résultats différents d’une simple superposition.

Dans cette situation, il n’existe que deux états de bords sur chaque bord, de spins opposés et de direction de propagation différente. Cela se traduit par une matrice de conductance nouvelle :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \frac{e^2}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

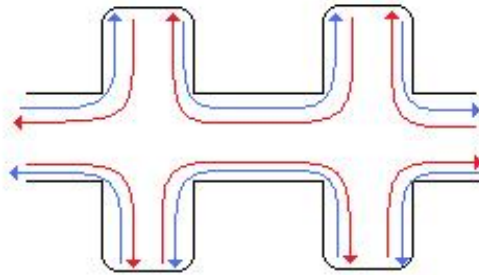


FIGURE 3.5 – Etude du conducteur à 6 contacts dans le cadre de l’effet Hall quantique de spin.

Ainsi, de la même façon que pour l’effet Hall quantique, on supprime la dernière ligne et la dernière colonne et on se ramène à une matrice tridiagonale, qui est inversible. En l’inversant on peut voir les différences de potentiel chimique que crée le passage d’un courant entre deux bornes. Les résultats sont consignés dans la figure 3.6 où on a utilisé la géométrie particulière du conducteur pour le déformer en cercle.

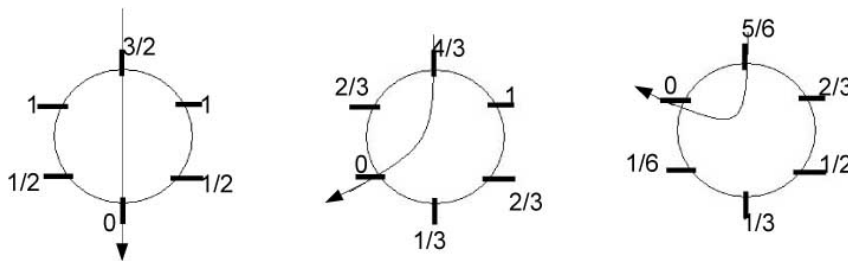


FIGURE 3.6 – Valeur des potentiels chimiques aux contacts du conducteur, pour un courant I circulant selon la flèche. Les valeurs sont en unités de $\frac{Ie}{h}$.

On s’aperçoit alors que contrairement à l’effet Hall quantique, des chutes de potentiel se créent entre les contacts, et qu’en plus ces chutes de potentiel sont régulières. Ceci s’explique aisément si l’on admet qu’à chaque contact, les populations de spins up et spins down venant des deux contacts voisins

s'équilibrent. Ainsi on obtient que $2\mu_i = \mu_{i-1} + \mu_{i+1}$ pour les sondes de tension, dans lesquelles aucun courant ne peut sortir ou entrer. Ces résultats ont été validées expérimentalement par Zhang et Molenkamp très récemment[5].

3.3.1 Sondes ferromagnétiques

Il est intéressant de noter que l'effet Hall quantique de spin a un effet opposé sur deux électrons de spin opposé, il est alors naturel d'essayer de voir si l'on peut se servir de cet effet pour "trier" des spins. Notre approche a été de voir quel est l'effet que produirait une sonde dont les potentiels chimiques des spins up et des spins down sont différents, $\mu^{\uparrow\downarrow} = \mu \pm \Delta$. L'introduction d'une telle sonde perturbe les potentiels chimiques de la manière montrée ci-après.

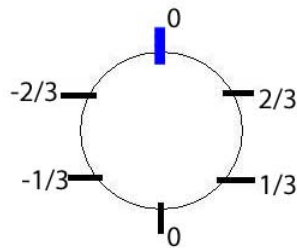


FIGURE 3.7 – Décalage des potentiels chimiques observé par l'introduction d'une sonde polarisée en spin (en haut, bleue), en unité de Δ .

La linéarité du problème considéré permet alors d'utiliser deux sondes placées où l'on veut, et de regarder ce que l'on obtient comme résistance à quatre contacts pour les différentes configurations.

Chapitre 4

Conclusions

Du point de vue du travail effectué lors de ce stage de quatre mois, après une partie de bibliographie, concernant dans un premier temps le formalisme de Büttiker, puis l'effet Hall quantique de spin, j'ai eu la possibilité de me lancer dans quelques calculs, qui m'ont permis de mieux appréhender les phénomènes en jeu. J'ai ainsi pu développer mes études vers deux directions, l'une se concentrant sur l'étude des états de bord, et leur stabilité face à l'introduction d'un champ magnétique, l'autre sur le formalisme de Büttiker que j'ai appliqué à cette nouvelle phase topologique.

À un niveau plus personnel, une des satisfactions de ce stage fut de voir que la méthode que j'avais suivie, ainsi que les résultats que j'avais obtenus avaient trouvé un écho, via une prépublication[5] de Zhang et Molenkamp. J'ai pu aussi apprécier la vitesse avec laquelle un sujet nouveau sur lequel se penchent de nombreux physiciens est susceptible d'évoluer, les axes du travail de mon stage ayant eux aussi changé en fonction des travaux les plus récents. Je pense que cette réactivité et cette vitesse de changement du sujet qui m'ont convaincu d'essayer de mieux comprendre cet effet, et donc de continuer par une thèse au laboratoire de physique de l'Ens Lyon.

Je tiens à remercier le laboratoire de physique de l'Ens Lyon de m'avoir accueilli, et plus particulièrement D. Carpentier pour les conseils qu'il a pu me fournir durant mon travail. Je reconnais aussi avoir profité de discussions fructueuses avec P. De Giovanni et aussi A. Coutant.

Bibliographie

- [1] B. Bernevig, T. Hughes, and S. Zhang. Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells. *Science*, 314, 2006.
- [2] M. Büttiker. Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors. *Physical Review B*, 38(14), 1988.
- [3] C. Kane and E. Mele. Finite size effects on helical edge states in a quantum spin-hall system. *Physical review letters*, 95(226801), 2005.
- [4] Markus Koenig, Hartmut Buhmann, Laurens W. Molenkamp, Taylor L. Hughes, Chao-Xing Liu, Xiao-Liang Qi, and Shou-Cheng Zhang. The quantum spin hall effect : Theory and experiment. *JPJS*.
- [5] Andreas Roth, Christoph Bruene, Hartmut Buhmann, Laurens W. Molenkamp, Joseph Maciejko, Xiao-Liang Qi, and Shou-Cheng Zhang. Nonlocal edge state transport in the quantum spin Hall state. 2009.
- [6] B. Zhou, H. Lu, R. Chu, S. Shen, and Q. Niu. Finite size effects on helical edge states in a quantum spin-hall system. *Physical review letters*, 101(246807), 2008.