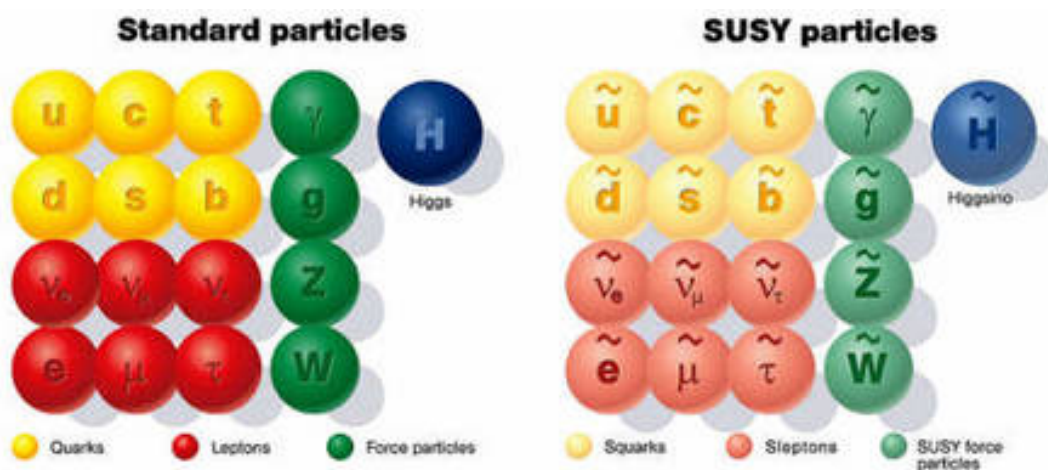


Corrections d'ordre supérieur en supersymétrie

SOUS LA DIRECTION D'HENNING SAMTLEBEN ET FRANÇOIS GIERES



Résumé

Nous nous intéressons ici à l'étude des corrections supersymétriques d'une théorie libre. En effet, nous connaissons aujourd'hui les Lagrangiens libres (sans interactions) de toutes les particules selon leur spin et la dimension d'espace-temps. Cependant, on peut être amené à ajouter des termes supplémentaires pour différentes raisons (corrections de cordes, renormalisation). Nous cherchons alors à comprendre comment se comportent les différentes corrections d'ordre supérieur possibles lorsqu'on impose certaines symétries (supersymétrie, invariance de Lorentz, invariance de jauge,...). Nous nous sommes concentrés sur le cas d'une théorie supersymétrique avec un champ scalaire et un champ spinoriel à 3 dimensions d'espace-temps. Le but principal a été de comprendre comment exploiter la théorie des représentations, outil mathématique très développé, en vue de classer les différentes corrections possibles.

Conventions :

- Dans cette étude, on travaillera dans un système d'unité où $c = 1$ et $\hbar = 1$. Notamment, les grandeurs énergie, masse, longueur ou temps sont dimensionnellement équivalentes.
- La métrique de Minkowsky est définie ici comme $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2$.
- On adopte également la convention d'Einstein ou sommation des indices répétés. L'écriture $\partial_\mu X \partial^\mu X$ signifie $\sum_{\mu=1}^3 \partial_\mu X \partial^\mu X$.

Table des matières

Introduction	1
1 Représentations	2
1.1 Lagrangien et corrections	2
1.2 Représentations, cas du groupe $SO(1,2)$	3
1.2.1 Définitions générales	3
1.2.2 Représentations irréductibles de $so(3)$	6
1.2.3 Constructions de représentations de $so(3)$	9
1.3 Le problème du champ scalaire	10
2 Supersymétrie	14
2.1 Spineurs Majorana	14
2.2 Super algèbre de symétrie	15
2.3 Théories supersymétriques	17
2.4 Calcul explicite	18
Conclusions	20
Rigidité de la supersymétrie	20
Conclusion personnelle	20
A Formulaire sur les représentations	21
B Dualisation de Maxwell	22
C Théorie non abélienne	24

Introduction

La théorie des cordes est une théorie destinée à décrire les interactions fondamentales à l'échelle microscopique, qui remplace la notion de particules élémentaires par des objets fondamentaux étendus, les cordes. Sa cohérence exige la supersymétrie et la présence d'un espace-temps de 10 dimensions. Aux basses énergies, et après compactifications des dimensions supplémentaires, la théorie des cordes est décrite par des théories des champs effectives à quatre dimensions, des supergravités jaugées.

La théorie des cordes prévoit des corrections à la relativité générale d'Einstein d'ordre supérieur en α' (l'inverse de la tension de la corde). Bien que ces corrections sont loin d'être observables, elles sont d'une grande importance conceptuelle pour des questions telles que la stabilisation des modules ou la brisure de supersymétrie. Mais ce type de correction présente aussi un intérêt dans l'analyse des divergences de la supergravité maximale. Des indications récentes de la possible finitude de cette théorie ont suscité un regain d'intérêt pour cette théorie comme théorie fondamentale et indépendante de la gravité quantique à quatre dimensions au-delà du domaine de la théorie des cordes.

Le but de cette étude est de comprendre le lien étroit entre les groupes de symétrie d'une théorie et la structure de ces corrections. Les théories de supergravité possèdent plusieurs groupes de symétrie, souvent exceptionnels, et présentent donc une structure très complexe. Nous nous sommes ici focalisés sur l'invariance de Lorentz et la supersymétrie. Nous avons tenté de comprendre comment la théorie des représentations pouvait être utilisée dans l'étude des corrections d'ordre supérieur sur une théorie non jaugée. La théorie que nous étudions peut être reliée à la théorie de Super Maxwell à $D = 3$ (*cf.* appendice).

Chapitre 1

Représentations

1.1 Lagrangien et corrections

Nous nous intéressons ici aux théories scalaires (un champ scalaire X) à 3 dimensions (t, x, y), 1 temporelle et 2 spatiales. Le Lagrangien d'une telle théorie est essentiellement constitué d'une combinaison linéaire de produits de dérivées de X .

$$\text{ex : } L = \partial_x X - 4(\partial_t X)(\partial_y \partial_x X). \quad (1.1)$$

Même si certains termes sont des produits, c'est surtout l'aspect combinaison linéaire qui nous intéresse. Ainsi considérerons-nous $(\partial_x X)(\partial_x X)$ comme un terme linéairement indépendant de $\partial_x X$ et non comme son carrée. Parmi les combinaisons linéaires possibles, on sait que certaines sont invariantes par transformations de Lorentz.

$$\text{ex : } L = (\partial_t X)^2 - (\partial_x X)^2 - (\partial_y X)^2 = \partial_\mu X \partial^\mu X. \quad (1.2)$$

La question qui se pose alors est de déterminer les Lagrangiens physiquement acceptables, c'est-à-dire ceux qui sont invariants sous le groupe de Lorentz ($SO(1, 2)$) ou autrement dit, ceux qui décrivent une théorie invariante par changement de référentiel. Pour cela, il nous faut d'abord classifier un peu les différents termes possibles. Nous commencerons par définir l'ordre d'un terme. Celui-ci se définit par analyse dimensionnelle. En effet, on part de l'action d'un champ libre : $S = \int \partial_\mu X \partial^\mu X d^3 x_\mu$, sachant que l'action est sans dimension ($\hbar = 1$), on en déduit la dimension de X : $[X] = [L]^{-\frac{1}{2}}$. De par nos conventions, toutes les grandeurs mises en jeu sont homogènes à une puissance d'une longueur. On dira donc qu'une grandeur est d'ordre δ si elle est homogène à $[L]^{-\delta}$. Le champ X est donc d'ordre $\frac{1}{2}$, une dérivée ∂_μ est de dimension 1, et ainsi de suite.

$$\text{ex : } \square X \text{ est d'ordre } \frac{5}{2}. \quad (1.3)$$

Une classe particulière de terme va nous intéresser. En effet, la théorie des cordes prévoit des corrections aux Lagrangiens usuels en puissance de α' (tension de la corde). Cette tension est d'ordre $-\frac{3}{2}$, les termes nous intéressant sont donc ceux d'ordre $3 + \frac{3}{2}n$, qui sont des corrections d'ordre n en α' . Ce type d'étude a déjà été réalisé dans différents contextes[1][2][3].

Nous cherchons ici à étudier la structure des différentes corrections possibles. Nous devons donc tout d'abord comprendre comment le groupe de Lorentz transforme ces termes. Ainsi pourrions-nous conserver seulement les combinaisons linéaires invariantes. C'est à ce moment que la notion

de représentation apparaît comme l'outil mathématique le plus adapté à cette étude. En effet, la théorie des représentations étudie comment un groupe peut agir sur un espace vectoriel. On va donc étudier l'action du groupe de Lorentz sur l'espace des différents Lagrangiens possibles. Le point essentiel sera d'utiliser le fait que $SO(1,2)$ est un groupe de Lie, on verra alors que la structure de son algèbre de Lie nous donnera accès à toutes les informations dont nous avons besoin.

1.2 Représentations, cas du groupe $SO(1,2)$

1.2.1 Définitions générales

Nous travaillons ici essentiellement avec des groupes de Lie (et même essentiellement $SO(1,2)$). Il convient donc de comprendre ce qu'est un groupe de Lie avant de s'intéresser aux représentations elles-mêmes[4][5][6].

définitions :

- Un groupe de Lie est un groupe qui est également une variété différentielle (de classe C^∞), tel que le produit et le passage à l'inverse sont des applications lisses (C^∞).
- Un groupe de Lie matriciel est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ qui est également une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$.

De façon plus imagée, un groupe de Lie matriciel (incluant tous les groupes usuels) est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (ensemble de matrices inversibles stable par produit) tel que le plan tangent en tout point existe. On travaillera à présent avec des groupes matriciels connexes ¹.

Parmi ces plans tangents, le plan tangent en l'unité I_n a un statut particulier : c'est l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie. C'est une algèbre de Lie car c'est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ stable par application du commutateur. Il existe énormément de propriétés liant un groupe de Lie et son algèbre de Lie. Nous nous contenterons de retenir l'essentiel dans notre cas. On va vouloir envoyer des éléments de l'algèbre de Lie sur le groupe de Lie et vice-versa. Pour cela, on utilise l'application exponentielle. Si G est un groupe de Lie et \mathcal{G} est son algèbre de Lie, on retiendra :

$$\text{Si } A \in \mathcal{G} \text{ alors pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ on a } e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in G. \quad (1.4)$$

En dérivant en 0, on récupère la valeur de A , ce point justifie le fait que l'on qualifie A de transformation infinitésimale². Réciproquement :

$$\text{Si } g \in G \text{ alors il existe un nombre fini de } A_j \in \mathcal{G} \text{ tels que } g = e^{A_1} e^{A_2} \dots e^{A_q}. \quad (1.5)$$

Ces 2 formules vont nous permettre de transférer les propriétés du groupe vers l'algèbre et vice-versa. Notons que la réciproque stipule que tout élément du groupe est un produit de plusieurs exponentiels, on ne peut pas passer à l'exponentiel de la somme car à priori, les matrices

¹Notons à ce point que $SO(1,2)$ n'est pas connexe, on sous-entendra alors qu'on ne considère que la composante connexe à l'unité. Cela revient à étudier uniquement les rotations et boost et non l'inversion du temps et la parité spatiale. Ces derniers pourront être étudiés séparément à posteriori.

²si t est assez petit on a $e^{tA} \simeq I + tA$.

(A_j) ne commutent pas. Revenons maintenant dans le vif du sujet :

définition : Une représentation d'un groupe G est la donnée d'un couple (ρ, V) où V est un espace vectoriel de dimension finie³ n et ρ un morphisme de groupe de G dans $GL(V)$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera la représentation tout simplement V (le morphisme ρ sera sous-entendu). Si $g \in G$, l'image d'un vecteur v par $\rho(g)$ sera notée $g.v$

Cette définition est en fait assez naturelle. Une représentation d'un groupe est une façon que celui-ci a d'agir sur un espace vectoriel, c'est-à-dire de transformer ses vecteurs. On veut alors d'une part que la transformation d'une somme de 2 vecteurs soit la somme des transformations de ces vecteurs : $g.(u+v) = g.u + g.v$ (c'est la condition ρ à valeur dans $GL(V)$). D'autre part, on veut que si l'on applique une transformation puis une autre, cela revienne à appliquer directement le produit de ces 2 transformations (c'est la condition ρ est un morphisme). Dans notre problème, le groupe G est $SO(1,2)$ et l'espace V sera l'espace des termes possibles. On voit donc qu'il nous faut comprendre la structure des représentations de $SO(1,2)$. Nous allons voir qu'en réalité, il convient d'étudier les représentations de l'algèbre de Lie associée $so(1,2) \sim so(3) \sim su(2)$. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe de Lie G , on définit :

$$\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(V) \quad (1.6)$$

$$A \mapsto \left(\frac{d(\rho(e^{tA}))}{dt} \right)_{t=0}, \quad (1.7)$$

En effet, si l'on imagine que $\rho(e^{tA}) = e^{tB}$, en dérivant en 0, on récupère la valeur de B qui est une transformation infinitésimale sur V . L'application ϕ définit ce que l'on appelle une représentation d'algèbre de Lie. Elle correspond à la représentation ρ « descendue » dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} . Si l'on dérive la relation $\rho(g)\rho(h) = \rho(g.h)$ (ρ morphisme), on s'aperçoit que ϕ respecte le commutateur, c'est-à-dire : $[\phi(A), \phi(B)] = \phi([A, B])$. Cela conduit donc à la définition suivante :

définition : Une représentation d'une algèbre de Lie \mathcal{G} est la donnée d'un couple (ϕ, V) où V est un espace vectoriel de dimension finie et ϕ une application linéaire de \mathcal{G} dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $[\phi(A), \phi(B)] = \phi([A, B])$.

On s'empressera de faire les mêmes raccourcis d'écriture que pour les représentations de groupe. Notamment : $\phi(A)(v)$ sera noté $A.v$. A ce stade, on voit que toute représentation de groupe se « descend » en une représentation d'algèbre de Lie. On peut alors se demander si la réciproque est vraie. Toute représentation d'algèbre de Lie se remonte-elle en une représentation de groupe de Lie ? La réponse à cette question est malheureusement non. Par contre, on montre que si le groupe G est simplement connexe⁴ alors le retour est toujours possible. Hélas, même pour un groupe aussi simple que $SO(1,2)$, sa topologie non triviale empêche cette réciprocity. Cependant, on sait que toute représentation de groupe descend en représentation d'algèbre de Lie. Donc, si l'on connaît toutes les représentations de l'algèbre de Lie $so(3)$, on sait que les représentations de $SO(1,2)$ sont justement celles que l'on pourra remonter. Grossièrement dit, on a trop de représentations, au pire

³Il existe naturellement une généralisation pour des représentations de dimension infinie, mais cela n'a pas d'utilité ici.

⁴tout lacet est continûment contractible en un point.

certaines ne remontent pas, mais parmi celles-ci, on sait que se cachent toutes les représentations de groupe. En fait, dans ce cas précis, on montre qu'une partie remonte en une représentation de groupe, alors que l'autre partie remonte seulement en une représentation projective : ce sont les représentations spinorielles. Ceci est à l'origine du fait que si l'on effectue une rotation de 2π d'un électron, on ne retrouve pas l'état de départ, il faut effectuer une rotation d'angle 4π .

Nous allons maintenant tenter de classifier les représentations de $so(3)$. Tout d'abord, on se rappelle que cette algèbre est l'algèbre des matrices 3×3 antisymétriques. Comme cette algèbre est déjà plongée dans $M_3(\mathbb{R})$, on connaît donc déjà une représentation naturelle, celle fournie par l'action canonique sur \mathbb{R}^3 . Autrement dit, on considère juste la multiplication sur les matrices colonnes d'ordre 3. Il s'agit de la représentation standard (ou vectorielle). A partir de celle-ci, on peut construire des représentations plus compliquées. Par exemple on agit sur \mathbb{R}^6 , si $A \in so(3)$:

$$\text{si } v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3. \quad (1.8)$$

On définit

$$A.v = \begin{pmatrix} A.v_1 \\ A.v_2 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

On se rend vite compte que cette nouvelle représentation n'a rien de fondamentale. Il s'agit juste de 2 « copies » de la représentation standard. En effet, on peut découper \mathbb{R}^6 en $\mathbb{R}^3 \times \{0\} \oplus \{0\} \times \mathbb{R}^3$, et A agit sur chaque composante de façon standard. On a fait une somme de représentations. Un autre exemple peut être intéressant. On commence par remarquer que $so(3)$ agit sur \mathbb{R} de façon simple : en renvoyant toujours 0. Autrement dit : $\forall A \in so(3), x \in \mathbb{R}, A.x = 0$, c'est la représentation triviale (ou scalaire). On construit alors une représentation sur \mathbb{R}^4 :

$$A. \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Là encore, il ne s'agit que de la somme de la représentation standard et de la représentation triviale. On se demande alors comment savoir si une représentation est une somme de sous-représentations. Pour cela, on remarque que dans notre premier exemple, si un vecteur a ses 3 dernières composantes nulles, il en est de même pour tout vecteur image par un $A \in so(3)$. Autrement dit, $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ est stable par tout A . On est alors amené à poser la définition suivante, qui généralise cette idée :

définition : Une représentation V est dite irréductible s'il n'existe pas de sous-espace F autre que $\{0\}$ et V telle que F est A -stable pour tout $A \in \mathcal{G}$.

Les représentations irréductibles sont donc celles qui ne sont pas somme de plusieurs représentations. Réciproquement, on peut montrer que pour une certaine classe d'algèbre de Lie (ou groupe de Lie), toute représentation est somme (finie) de représentations irréductibles. Ces algèbres (groupes)

sont appelées semi-simples. On montre que $so(3)$ en fait partie. Il nous reste donc à analyser les représentations irréductibles de $so(3)$.

1.2.2 Représentations irréductibles de $so(3)$

Le travail qui suit pourra sembler familier aux initiés de mécanique quantique. En effet, les méthodes utilisées sont très proches de celles employées pour calculer les valeurs propres d'un opérateur de moment cinétique[7]. Ce n'est évidemment pas un hasard, le choix de trois opérateurs de moment cinétique J_x , J_y et J_z correspond en fait exactement au choix d'une représentation de $so(3)$. Par analogie avec les opérateurs de Spin, on utilisera une base de notre algèbre définie comme suit :

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Les relations de commutations s'écrivent alors :

$$[S_x, S_y] = S_z, \quad (1.12)$$

et permutations circulaires. Ceci peut également s'écrire à l'aide du tenseur de Levi-Civita :

$$[S_i, S_j] = \epsilon^{ijk} S_k, \quad (1.13)$$

Avant de pouvoir classifier les représentations, nous allons devoir utiliser le corps des complexes. Nous allons donc travailler avec ce que l'on appelle la complexifiée de $so(3)$ (notée $so_3\mathbb{C}$). Au lieu de se restreindre aux combinaisons linéaires réelles de S_x , S_y et S_z , nous utiliserons toutes les combinaisons linéaires complexes. On peut écrire $so_3\mathbb{C} = Vect_{\mathbb{C}}(so(3))$. Les représentations V considérées seront donc sur des espaces vectoriels complexes. Ce plongement n'est malheureusement pas gratuit. S'il est clair qu'une représentation réelle de $so(3)$ peut se prolonger en une représentation complexe de $so_3\mathbb{C}$, le contraire n'est pas vrai. Cependant, nous admettrons ici que cela ne pose pas de problème.

Ce faisant, nous allons réécrire les relations de commutations en utilisant une nouvelle base :

$$S_+ = S_x + iS_y, \quad S_- = S_x - iS_y, \quad H = iS_z. \quad (1.14)$$

Les relations de commutations s'écrivent dans cette base :

$$[H, S_+] = S_+, \quad (1.15)$$

$$[H, S_-] = -S_-, \quad (1.16)$$

$$[S_+, S_-] = -2H. \quad (1.17)$$

Nous allons à présent classifier les représentations irréductibles en étudiant le spectre de H . Soit V une telle représentation. Nous allons montrer que H (ou plutôt $\rho(H)$) est diagonalisable sur V . Autrement dit, nous allons décomposer V en somme directe :

$$V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}, \quad (1.18)$$

avec pour tout $v \in V_\alpha$, $H.v = \alpha v$. Pour cela, on considère une valeur propre λ de vecteur propre $v \neq 0$. Un tel vecteur existe toujours car V est un espace vectoriel complexe⁵. On se demande comment S_+ agit sur v . Pour cela, on va faire usage des relations de commutations :

$$H.(S_+.v) = [H, S_+].v + S_+. (H.v) \quad (1.19)$$

$$= S_+.v + S_+. (\lambda v) \quad (1.20)$$

$$= (\lambda + 1)S_+.v. \quad (1.21)$$

Notons que l'on a implicitement utilisé le fait que ϕ préserve le commutateur. Si v est vecteur propre de H avec pour valeur propre λ , $S_+.v$ l'est aussi mais de valeur propre $\lambda + 1$. Le même calcul avec S_- montre que inversement, celui-ci envoie un vecteur propre associé à λ vers un vecteur propre associé à $\lambda - 1$:

$$H.(S_-.v) = (\lambda - 1)S_-.v. \quad (1.22)$$

On a donc le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} S_+ & & S_+ & & S_+ & & S_+ \\ \leftarrow & V_\lambda & \leftarrow & V_{\lambda+1} & \leftarrow & V_{\lambda+2} & \leftarrow \\ S_- & & S_- & & S_- & & S_- \end{array} \quad (1.23)$$

Nous allons montrer que cette chaîne est finie⁶, et décrit l'espace V en entier. Nous aurons ainsi la décomposition souhaitée. La chaîne est en fait nécessairement finie car V tout entier est de dimension finie. Mais voyons cela de façon plus constructive. Nous allons commencer par nous placer dans l'espace de valeur propre maximale, que l'on notera λ . Cette espace existe car en dimension finie, H ne peut admettre qu'un nombre fini de valeur propre. Soit donc v un tel vecteur (non nul). On a entre autre $S_+.v = 0$, sinon on aurait un vecteur propre de valeur propre plus élevée. On va maintenant parcourir la chaîne ci-dessus via l'opérateur S_- . On construit alors l'espace généré par v et ses images par les puissances successives de S_- . Cela nous mène au lemme suivant :

Lemme : L'espace $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Vect((S_-)^n.v) = v.\mathbb{C} \oplus S_-.v.\mathbb{C} \oplus (S_-)^2.v.\mathbb{C} \oplus \dots$ est exactement l'espace V tout entier.

Notons d'abord que cette somme est finie, toujours en raison de la finitude de la dimension. On sait de plus que cet espace n'est pas réduit à $\{0\}$ car il contient v qui est non nul. Pour montrer que l'on a exactement tout l'espace, il suffit de montrer que notre somme est stable par $so_3\mathbb{C}$ et d'utiliser l'hypothèse d'irréductibilité de V . Premièrement, par construction, notre espace (que l'on note V' dans la suite) est stable par l'action de S_- . De plus, un vecteur $(S_-)^n.v$, s'il est non nul, est vecteur propre de H de valeur propre $\lambda - n$. V' est donc aussi stable par H . Reste à montrer qu'il est stable sous l'action de S_+ . Pour cela, nous utiliserons de nouveau les relations

⁵donc le polynôme caractéristique de H admet au moins une racine

⁶au sens qu'il n'y a qu'un nombre fini de V_λ différent de $\{0\}$.

de commutations :

$$S_+.(S_- .v) = [S_+, S_-] .v + S_-(S_+ .v) \quad (1.24)$$

$$= -2H.v + S_- .0 \quad (1.25)$$

$$= -2\lambda v, \quad (1.26)$$

où l'on a utilisé $S_+ .v = 0$. De même :

$$S_+ .((S_-)^2 .v) = [S_+, S_-] .S_- .v + S_-(S_+(S_-) .v) \quad (1.27)$$

$$= -2H.S_- .v + S_- .(-2\lambda v) \quad (1.28)$$

$$= -2(\lambda - 1)S_- .v - 2\lambda S_- .v \quad (1.29)$$

$$= 2(1 - 2\lambda)S_- .v. \quad (1.30)$$

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$:

$$S_+ .((S_-)^n .v) = -2H.(S_-)^{n-1} .v + S_-(S_+(S_-)^{n-1} .v) \quad (1.31)$$

$$= -2(\lambda + 1 - n)(S_-)^{n-1} .v + S_- .S_+ .(S_-)^{n-1} .v, \quad (1.32)$$

ce qui permet de montrer par récurrence que :

$$S_+ .(S_-)^n .v = n(n - 1 - 2\lambda)(S_-)^{n-1} .v. \quad (1.33)$$

Ceci nous permet de conclure que V' est aussi stable par S_+ , et donc est l'espace tout entier par hypothèse d'irréductibilité. Mais cette égalité nous apporte également d'autres informations. En effet, on en tire la structure de tout le spectre. Pour cela, commençons par noter qu'à partir d'un moment, la suite $(S_-)^n .v$ s'annule (dimension finie). Soit donc $m \in \mathbb{N}^*$ le premier entier tel que $(S_-)^m .v = 0$. En réécrivant la formule précédente, il vient :

$$0 = m(m - 1 - 2\lambda)(S_-)^{m-1} .v. \quad (1.34)$$

Comme m est le premier entier satisfaisant cette propriété, $m - 1$ ne la vérifie pas, d'où $(S_-)^{m-1} .v \neq 0$. On obtient donc une condition sur λ :

$$\lambda = \frac{m - 1}{2}. \quad (1.35)$$

Autrement dit, λ est un demi-entier. De plus, par définition de m , $(S_-)^{m-1} .v$ est vecteur propre de valeur propre minimale (on atteint le « bord gauche » de la chaîne). La valeur propre associée est donc $\frac{m-1}{2} - (m - 1) = -\frac{m-1}{2}$. En sachant de plus que les valeurs propres sont séparées par des entiers, on obtient la structure complète du spectre de H :

$$\{\lambda, \lambda - 1, \dots, -\lambda\}, \text{ où } \lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{N}. \quad (1.36)$$

Résumons la situation. N'importe quelle représentation de $so(3)$ est somme de représentations irréductibles. Celles-ci sont entièrement caractérisées par le spectre de H . Mieux : toutes les représentations irréductibles sont caractérisées par la donnée d'un unique demi-entier λ , le spectre

de H étant alors $\{\lambda, \lambda - 1, \dots, -\lambda\}$. On notera $V^{(\lambda)}$ la représentation caractérisée par λ . On peut noter les premières ainsi que le spectre associée :

$$V^{(0)} : \{0\} \text{ (représentation triviale),} \quad (1.37)$$

$$V^{(\frac{1}{2})} : \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \text{ (représentation spinorielle),} \quad (1.38)$$

$$V^{(1)} : \{-1, 0, 1\} \text{ (représentation standard),} \quad (1.39)$$

$$V^{(\frac{3}{2})} : \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}, \quad (1.40)$$

$$V^{(2)} : \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad (1.41)$$

$$\dots \quad (1.42)$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, ceci n'est pas sans rappeler la classification des spins.

1.2.3 Constructions de représentations de $so(3)$

Dans cette section, nous allons exploiter les résultats précédents pour obtenir la décomposition de représentations construites à partir des représentations les plus simples. Commençons par un exemple didactique. Nous allons étudier la représentation $V = V^{(1)} \otimes V^{(1)}$. D'abord nous devons comprendre comment agit un élément $A \in so(3)$ sur un vecteur de la forme $u \otimes v$. Pour cela, nous devons dériver l'action du groupe $SO(1, 2)$:

$$g.(u \otimes v) = (g.u) \otimes (g.v) \quad (1.43)$$

$$\text{donc } e^{tA}.(u \otimes v) = (e^{tA}.u) \otimes (e^{tA}.v) \quad (1.44)$$

$$\text{en dérivant : } A.(u \otimes v) = (A.u) \otimes v + u \otimes (A.v) \quad (1.45)$$

On voit donc que l'algèbre agit sur un produit tensoriel en sommant les actions sur un facteur à la fois. Cette formule appliquée à H nous permet facilement d'obtenir son spectre. En effet, les valeurs propres de H dans $V^{(1)} \otimes V^{(1)}$ sont alors les sommes de 2 valeurs propres dans $V^{(1)}$. Or dans $V^{(1)}$, le spectre est $\{-1, 0, 1\}$, donc le spectre dans $V^{(1)} \otimes V^{(1)}$ est :

$$-1 - 1 = -2 \quad (1.46)$$

$$-1 + 0 = -1$$

$$-1 + 1 = 0$$

$$0 - 1 = -1$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 2.$$

Les valeurs propres apparaissent ici avec des multiplicités non triviales. Mais si l'on regarde bien, on peut séparer ce spectre en $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\{-1, 0, 1\}$ et $\{0\}$. Cette séparation des valeurs

propres (avec multiplicité) nous donne exactement la décomposition de $V^{(1)} \otimes V^{(1)}$:

$$V^{(1)} \otimes V^{(1)} \simeq V^{(2)} \oplus V^{(1)} \oplus V^{(0)}. \quad (1.47)$$

De façon plus générale, le spectre d'un produit tensoriel de V et W est :

$$V \otimes W : \sum_{i,j} (\lambda_i + \mu_j). \quad (1.48)$$

On peut également étudier les puissances symétriques ou antisymétriques d'une représentation V donnée. Pour cela, il faut noter que les multiplicités seront différentes du simple produit tensoriel. En effet, la relation $u \cdot v = v \cdot u$ dans $Sym^2 V$ ou $u \wedge v = -v \wedge u$ et $u \wedge u = 0$ dans $\Lambda^2 V$ restreignent le nombre de vecteurs propres de H que l'on pourra former. Il est cependant facile de calculer le spectre des puissances de V :

$$Sym^n V : \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_n}) \quad (1.49)$$

$$\Lambda^n V : \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_n}) \quad (1.50)$$

Où les (λ_i) sont les valeurs propres dans V . Cette formule ne donne pas directement la décomposition générale de $Sym^n V$ ou $\Lambda^n V$, mais elle donne un moyen simple de la construire.

De façon plus algorithmique, pour décomposer une représentation, on commence par construire le spectre de H (comme ce que l'on vient de voir). Ensuite, on considère la multiplicité de la valeur propre la plus élevée (notée λ), c'est alors exactement la multiplicité de $V^{(\lambda)}$ dans la décomposition. Ensuite, on observe la multiplicité de $\lambda - \frac{1}{2}$, et l'on en déduit de même. Pour $\lambda - 1$, il faut être plus prudent. En effet, la valeur propre $\lambda - 1$ apparaît dans 2 représentations différentes : $V^{(\lambda)}$ et $V^{(\lambda-1)}$. Il nous faut donc soustraire la multiplicité de λ pour obtenir celle de $V^{(\lambda-1)}$ dans la décomposition. De même pour $V^{(\lambda-\frac{3}{2})}$. De façon générale, pour connaître la multiplicité d'un facteur irréductible, on s'intéresse à la multiplicité de la valeur propre maximale, mais en prenant soin de soustraire le nombre de fois ou celle-ci apparaît à cause des représentations de spin plus élevé (mais de même parité⁷).

Ce type d'algorithme a été implanté dans Maple, et nous disposons donc de programmes permettant de calculer des décompositions telles que $V \otimes W$ ou $\Lambda^n V$ de façon systématique.

Après avoir bien compris la notion de représentation, nous pouvons revenir à notre problème initial. Nous allons voir que les outils développés ici permettent de donner beaucoup d'informations rapidement.

1.3 Le problème du champ scalaire

Comme nous l'avons dit précédemment, un Lagrangien est une combinaison linéaire de X et de produit de ses dérivées. L'espace des termes possibles est alors vu comme un espace vectoriel sur

⁷au sens de entier vs demi-entier

lequel agit le groupe de Lorentz. C'est une représentation de $SO(1, 2)$. Mais les termes qui nous intéressent sont ceux invariants de Lorentz. Autrement dit, c'est le sous-espace isomorphe à $V^{(0)}$. Si l'on veut donc savoir le nombre de termes indépendants possibles pour former un Lagrangien convenable physiquement, il suffit de calculer la multiplicité de $V^{(0)}$ dans la décomposition de la représentation. On comprend alors le lien entre cette théorie mathématique et notre problème. Pour cela, nous devons commencer par comprendre comment le groupe de Lorentz transforme X et ses dérivées. Autrement dit, construire la représentation à décomposer.

Commençons par un cas simple : comment se transforme le terme $\partial_\mu \partial_\nu X$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2$) ? Pour cela, on effectue une transformation de Lorentz infinitésimale :

$$\delta(\partial_\mu \partial_\nu X) = \omega_\mu^\rho \partial_\rho \partial_\nu X + \omega_\nu^\rho \partial_\mu \partial_\rho X, \quad (1.51)$$

où ω_μ^ν dénote le générateur infinitésimale de la transformation. On a donc l'impression que $\partial_\mu \partial_\nu X$ appartient au carré tensoriel de la représentation standard $V^{(1)} \otimes V^{(1)}$. Cependant, nous savons que les dérivées partielles commutent, c'est-à-dire $\partial_\mu \partial_\nu X = \partial_\nu \partial_\mu X$. Ce terme est donc symétrique en μ et ν , il appartient donc au carré symétrique $Sym^2 V^{(1)}$. De façon plus générale, une dérivée n -ième $\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} X$ est vecteur de la représentation $Sym^n V^{(1)}$.

Nous allons maintenant nous intéresser au produit de 2 dérivées de X . Deux cas de figure se posent alors : le cas du terme $\partial_\mu X \partial_\nu X$, ou celui du terme $\partial_\mu \partial_\nu X \partial_\rho X$. En effet, dans les deux cas, nous avons affaire à une multiplication de scalaires, et donc qui commutent. Donc $\partial_\mu X \partial_\nu X = \partial_\nu X \partial_\mu X$ et $\partial_\mu \partial_\nu X \partial_\rho X = \partial_\rho X \partial_\mu \partial_\nu X$. A partir de ce moment, nous allons définir une convention d'écriture : un produit de dérivée de X s'écrit tel que les facteurs ayant le moins de dérivées soient à gauche. Il n'y a donc plus d'ambiguïté dans l'écriture du terme $\partial_\rho X \partial_\mu \partial_\nu X$. Mais il en reste dans l'écriture de $\partial_\mu X \partial_\nu X$. Ceci permet de comprendre que le premier terme appartient à la représentation $Sym^2 V^{(1)}$ alors que le deuxième appartient à la représentation $V^{(1)} \otimes Sym^2 V^{(1)}$. Ce problème peut se voir également en observant que 2 dérivées d'ordre différent (1 et 2 dans notre exemple) n'appartiennent pas à la même représentation. Leur produit ne peut donc pas appartenir à un produit symétrique, mais juste à un produit tensoriel.

Fort de ces constatations, nous dénommerons par « terme simple » un produit de dérivées de X toutes de même ordre. Un tel terme appartient à la représentation $B(p, q) = Sym^p (Sym^q V^{(1)})$. De façon générale, un terme de Lagrangien est un produit de termes simples dont les ordres des dérivées sont différents. Autrement dit, c'est un élément d'un produit tensoriel de $B(p_i, q_i)$ avec les q_i différents 2 à 2.

Il est maintenant temps de s'intéresser aux liens entre ordres et représentations. On comprend vite que l'ordre d'un terme contenu dans un produit tensoriel est la somme des ordres de chaque terme. De plus, l'ordre des termes simples s'écrit facilement en comptant les dérivées et les X :

$$\text{Ordre}(B(p, q)) = p(q + \frac{1}{2}). \quad (1.52)$$

Nous avons à présent tous les outils pour calculer le nombre de corrections possibles de la théorie scalaire. Commençons par le terme libre. Sans corrections en α' , les termes du Lagrangien

doivent être d'ordre 3. Nous allons donc répertorier les représentations de cet ordre, on trouve uniquement :

$$B(2, 1) = \text{Sym}^2 V^{(1)} = V^{(2)} \oplus V^{(0)}. \quad (1.53)$$

On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme invariant de Lorentz, il s'agit bien sûr du terme libre usuel : $\partial_\mu X \partial^\mu X$. On peut également s'intéresser aux corrections d'ordre 1 en α' . Ceux-ci sont d'ordre $\frac{9}{2}$. On compte donc les représentations :

$$B(3, 1) = \text{Sym}^3 V^{(1)} = V^{(3)} \oplus V^{(1)}, \quad (1.54)$$

$$B(1, 4) = \text{Sym}^4 V^{(1)} = V^{(4)} \oplus V^{(2)} \oplus V^{(0)}, \quad (1.55)$$

$$B(1, 1) \otimes B(2, 1) = V^{(1)} \otimes \text{Sym}^2 V^{(1)} = V^{(3)} \oplus V^{(2)} \oplus 2V^{(1)}. \quad (1.56)$$

On constate donc encore que l'on a qu'un seul terme possible : $\square\square X$, qui est élément de $B(1, 4)$.

Si l'on observe la formule exacte du terme correctif d'ordre α' , on constate que celui-ci n'est pas réellement pertinent. En effet, si l'on ne considère plus le Lagrangien, mais l'action qui est son intégrale sur l'espace-temps, le terme correspondant est uniquement un terme de surface. Autrement dit, parce que $\square\square X$ est une dérivée totale, pour des conditions aux bords fixes, ce terme disparaît lors du calcul des équations du mouvement. Si $S = \int \square\square X d^3x = 0$ (ou une constante indépendante de X). Plus généralement, on ne veut compter qu'une seule fois 2 termes reliés par intégrations par partie. En remarquant que ce cas de figure équivaut à dire que ces 2 termes diffèrent d'une dérivée totale, nous devons nous intéresser au quotient de l'espace des termes possibles avec l'espace des dérivées totales. Là encore, l'exploitation des représentations est cruciale.

En effet, une dérivée totale est un terme de la forme $\partial^\mu(\phi_\mu)$, où ϕ_μ appartient à la représentation $V^{(1)}$, car se transforme comme un vecteur. Nous devons donc nous intéresser cette fois à la multiplicité de $V^{(1)}$ dans la décomposition des représentations correspondantes. Comme ϕ_μ possède une dérivée en moins, il est d'ordre $n - 1$ si n est l'ordre des corrections que l'on étudie. Pour les corrections d'ordre α' , on trouve comme représentation d'ordre $\frac{7}{2}$:

$$B(1, 3) = \text{Sym}^3 V^{(1)} = V^{(3)} \oplus V^{(1)}. \quad (1.57)$$

Nous trouvons donc un seul terme vectoriel, il s'agit de $\partial_\mu \square X$, dont la 4-divergence redonne la correction calculée plus haut. Nous concluons maintenant qu'il n'y a en fait aucune correction pertinente d'ordre α' . Cependant, il nous faut remarquer que notre étude des dérivées totales est incomplète. En effet, nous avons compté tous les ϕ_μ possibles, mais que se passe-t-il si celui-ci est tel que $\partial^\mu(\phi_\mu) = 0$? En effet, dans ce cas, nous avons compté une dérivée totale de trop. Pour cela, on utilise le fait que si $\partial^\mu(\phi_\mu) = 0$, alors on peut écrire $\phi_\mu = \epsilon_\mu^{\nu\rho} \partial_\nu A_\rho$. Tout comme précédemment, compter le nombre de ϕ_μ de divergence nulle revient à calculer le nombre de vecteurs d'ordre $n - 2$. Mais là encore, on ne voudra pas compter les A_μ tel que $\epsilon_\mu^{\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = 0$. Dans ce dernier cas de figure, on sait que $A_\mu = \partial_\mu f$. Le comptage revient donc au nombre de scalaires d'ordre $n - 3$. A ce stade, nous avons tout pris en compte, en effet, si $\partial_\mu f = 0$, f est une constante. En résumé, le nombre de dérivées totales se calcule comme suit :

$$\text{Dérivées totales}_n = \text{Vecteur}_{n-1} - \text{Vecteur}_{n-2} + \text{Scalaire}_{n-3}. \quad (1.58)$$

Nous allons maintenant effectuer le calcul complet du nombre de corrections d'ordre α'^2 .

Représentations scalaires d'ordre 6 : 1 terme.

Représentations vectorielles d'ordre 5 : 1 terme.

Représentations vectorielles d'ordre 4 : 2 terme.

Représentations scalaires d'ordre 3 : 1 terme.

Il y a donc 1 correction possible, et 0 dérivées totales. Le seul Lagrangien d'ordre α' est donc $(\partial_\mu X \partial^\mu X)^2$. Il est possible de poursuivre les calculs pour les ordres supérieurs, soit via Maple, soit par calcul direct. Nous présentons ci-dessous les premiers résultats :

Ordre en α'	0	1	2	3	4	5	6
Corrections possibles	1	0	1	2	2	5	15

Que faire si l'on veut aller plus loin et connaître explicitement la forme des corrections recherchées? Pour cela, nous pouvons regarder de plus près la construction des représentations correspondantes. En effet, au lieu de ne retenir que la dimension, nous pouvons regarder la construction explicite des vecteurs propres; celle-ci correspond exactement à la formule explicite d'un terme. Cependant, il est souvent plus simple d'agir de façon plus cavalière. En effet, chaque représentation nous donne le nombre de X et de dérivées. Une fois que l'on connaît le nombre de termes nous intéressant, il suffit de regarder directement les contractions possibles des dérivées entre elles, ou à l'aide du tenseur $\epsilon_{\mu\nu\rho}$. Cependant, l'objectif étant de mesurer la « rigidité » de la supersymétrie, les nombres de termes s'avèrent être la donnée la plus pertinente. On comprend bien par exemple qu'à l'ordre α'^8 , il est fastidieux et peu intéressant de lister les 60 termes indépendants.

Chapitre 2

Supersymétrie

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la question fondamentale de cette étude. Le but est en effet de savoir comment la supersymétrie contraint les corrections de cordes. Autrement dit, parmi toutes les corrections possibles, quelle proportion reste-il si l'on impose la supersymétrie ? Pour commencer, il nous faut introduire un super partenaire de notre boson X . Nous allons donc reprendre l'étude qui précède, mais en ajoutant un champ fermionique.

2.1 Spineurs Majorana

A 3 dimensions d'espace-temps, les fermions sont décrits par des objets plus simples que les bi-spineurs de Dirac. Nous utilisons des spineurs majorana. Il s'agit d'un vecteur à 2 composantes. De plus, on utilise un analogue des matrices de Dirac à $D = 3$ [8]. Ces objets satisfont :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \text{ avec } \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Mais nous pouvons simplifier cela en imposant une condition de réalité sur les spineurs. Dans notre cas, on supposera simplement : $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}$. Nous allons maintenant construire (comme cela se fait pour l'équation de Dirac) un pseudo-produit scalaire sur les spineurs, ou de façon équivalente, associer à ψ un adjoint $\bar{\psi}$ qui est un vecteur ligne. En effet, on définit $\bar{\psi} = (\psi)^T \cdot C$, avec C une matrice, dont la forme explicite importe peu. Les propriétés essentielles de cet adjoint sont :

$$\text{l'application } (\psi, \phi) \mapsto \bar{\psi}\phi \text{ est bilinéaire,} \quad (2.3)$$

$$\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi, \quad (2.4)$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\phi = -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi. \quad (2.5)$$

Nous devons maintenant comprendre comment le groupe de Lorentz transforme les spineurs. Autrement dit, quel est le lien entre représentations et spineurs. En fait, comme son nom l'indique, un spineur ψ est un vecteur de la représentation spinorielle du groupe de Lorentz¹ : $\psi \in V^{(\frac{1}{2})}$. Lorsque l'on considère une dérivée $\partial_\mu\psi$, le groupe de Lorentz agit comme un vecteur sur la dérivée et comme un spineur sur ψ . Donc $\partial_\mu\psi \in V^{(1)} \otimes V^{(\frac{1}{2})}$. Plus généralement,

¹par construction même de l'équation de Dirac.

$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} \psi \in (Sym^n V^{(1)}) \otimes V^{(\frac{1}{2})}$. La grande subtilité par rapport au boson X , c'est qu'au lieu de commuter, les composantes de ψ anti-commutent. Ainsi un produit de plusieurs champs ψ appartient-il à un produit extérieur et non symétrique. Par exemple : $\bar{\psi}\psi \in \Lambda^2 V^{(\frac{1}{2})}$. Naturellement, comme pour le cas bosonique, le produit devient simplement tensoriel si les 2 termes ne comportent pas le même nombre de dérivées.

Les termes simples fermioniques seront donc éléments de la représentation :

$$F(p, q) = \Lambda^p \left(Sym^q V^{(1)} \otimes V^{(\frac{1}{2})} \right). \quad (2.6)$$

Dans la théorie générale, les termes sont donc des produits tensoriels de termes simples bosoniques ou fermioniques. On peut donc avoir soit des termes purement bosoniques ou fermioniques, soit des termes d'interactions. Nous avons donc calculé les corrections possibles pour les premiers ordres en α' :

Ordre en α'	0	1	2	3	4	5	6
Corrections possibles	2	2	6	11	46	122	417

2.2 Super algèbre de symétrie

Nous allons maintenant imposer à notre théorie d'être supersymétrique. Pour cela, nous devons comprendre comment la supersymétrie transforme les champs. Tout d'abord, qu'est-ce qu'une supersymétrie ? De façon imagée, il s'agit d'un élément d'une algèbre qui est la « racine carrée » de l'algèbre de Poincaré, d'où son appellation de super algèbre de Poincaré. On entend par là qu'elle contient des symétries fermioniques, telles que les commutateurs de ces dernières redonnent les symétries de l'algèbre de Poincaré. Plus précisément, une transformation infinitésimale est fermionique car le paramètre infinitésimal est un spineur[9][10].

$$\text{ex : } \delta_\theta(\partial_\nu X) = \theta \omega_\nu^\mu \partial_\mu X, \quad (2.7)$$

$$\delta_\epsilon X = i\bar{\epsilon}\psi. \quad (2.8)$$

Le premier cas est une transformation de Lorentz (bosonique) de paramètre θ réel. Le second en est une fermionique de paramètre ϵ qui est un spineur.

exemple : Le cas le plus simple est celui de la théorie libre, son Lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu X \partial^\mu X + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi. \quad (2.9)$$

Avec la notation de Feynman :

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (2.10)$$

On définit alors les symétries :

$$\delta_\epsilon X = i\bar{\psi}\epsilon, \quad (2.11)$$

$$\delta_\epsilon \psi = \not{\partial} X \epsilon. \quad (2.12)$$

On montre que non seulement le Lagrangien est invariant par cette symétrie, c'est-à-dire $\delta_\epsilon \mathcal{L}$ est une dérivée totale, mais c'est aussi le seul Lagrangien supersymétrique à cet ordre². Maintenant, si ϵ_1, ϵ_2 sont 2 paramètres fermioniques, on a :

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] = 2\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu. \quad (2.13)$$

On voit donc que selon le choix de ϵ_1 et ϵ_2 , on retrouve les translations infinitésimales (les dérivées partielles). Notons que nous avons fait le calcul avec les transformations infinitésimales. Si l'on travaille avec les super-générateurs (c'est-à-dire sans paramètre ϵ), nous devons considérer l'anti-commutateur. Cela provient du fait que la symétrie est fermionique car ϵ est un spineur.

cas général : On veut généraliser l'algèbre de supersymétrie. On écrit donc :

$$\delta_\epsilon X = \overline{A(\psi, X)} \epsilon, \quad (2.14)$$

$$\delta_\epsilon \psi = B(X, \psi) \epsilon. \quad (2.15)$$

Mais afin de simplifier ce cas, commençons par noter que A et B sont égaux au terme libre plus des corrections d'ordres supérieurs. Notamment : $A(\psi, X) = i\psi + \alpha'(\dots)$. Nous allons effectuer un changement de variable de champ, nous allons redéfinir le champ ψ . On pose $\psi' = \psi - i\alpha'(\dots)$, ainsi a-t-on : $A(\psi, X) = i\psi + \alpha'(\dots) = i\psi'$. Ce changement de variable permet d'imposer à une des transformations de rester celle du cas libre. Notons que l'on ne peut refaire cette astuce une deuxième fois. En effet, après ce changement, B aussi est redéfini, ce qui n'importe pas puisque B est quelconque à ce stade. Mais si l'on veut redéfinir X , la transformation de ψ sera à nouveau changée, et donc ne sera plus celle voulue. *In fine*, en redéfinissant ψ mais pas X , on peut donc imposer :

$$\delta_\epsilon X = i\bar{\psi} \epsilon, \quad (2.16)$$

$$\delta_\epsilon \psi = B(X, \psi) \epsilon. \quad (2.17)$$

Nous devons maintenant comprendre à quelle représentation appartient B . Autrement dit, comment se transforme-t-il sous $SO(1, 2)$. Pour ne pas briser l'invariance de Lorentz de la théorie, il faut que ces transformations commutent avec celles de Lorentz. Il faut donc que $B(X, \psi)\epsilon$ soit un spineur de Lorentz. Il y a donc 2 possibilités. Soit B est un scalaire, soit B est un vecteur contracté avec une matrice γ . En sachant de plus qu'à l'ordre le plus bas, B correspond au cas de la théorie libre, on écrit :

$$B(X, \psi) = \not{\partial} X \epsilon + \alpha' (S(X, \psi) + V_\mu(X, \psi) \gamma^\mu) \epsilon. \quad (2.18)$$

On comprend maintenant qu'un calcul de représentations nous permet de calculer le nombre de $SUSY$ possibles à un ordre donné. Plus précisément, à l'ordre n en α' , ces termes sont d'ordre $\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}$. Avant d'aller plus loin, nous voulons tout de même vérifier ce que la super algèbre devient dans ce cas généralisé. Nous allons donc calculer le commutateur de 2 transformations infinitésimales super symétriques :

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \cdot X = \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu X + \alpha' (\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 S + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 V_\mu), \quad (2.19)$$

$$= 2\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu X + 2\alpha' (\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 V_\mu). \quad (2.20)$$

²à 2 facteurs près que l'on peut absorber dans les définitions de ϵ et \mathcal{L} .

On s'aperçoit que si les termes scalaires ne perturbent pas l'algèbre, les vectoriels la modifient. Si nous acceptons de telles modifications, nous incluons dans notre étude des théories non minimales, il existe des transformations bosoniques autre que Poincaré. C'est la condition faible. La condition forte consiste à interdire ces perturbations de l'algèbre. Dans ce cas, il ne faut pas tenir compte des termes en V_μ dans les transformations possibles. On pourra également imposer une condition mixte : Nous ne voulons pas de perturbation sur la couche de masse. Autrement dit, on veut que les perturbations s'annulent si ψ satisfait les équations du mouvement. Cette dernière condition est plus compliquée à réaliser dans le cas général, car elle impose de calculer les équations du mouvement. Néanmoins, au premier ordre en α' , il est facile de caractériser ces termes. En effet, les perturbations doivent alors s'annuler si ψ satisfait l'équation libre (V_μ est déjà multiplié par α'). Cette dernière s'écrit $\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$. Il suffit donc que l'on ait :

$$V_\mu = \overline{W}_\mu \not{\partial} \psi. \quad (2.21)$$

Cela revient donc à compter les W_μ qui sont d'ordre $\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$. Ceux-ci sont à la fois des vecteurs et des spineurs. Ils sont donc éléments de la représentation $V^{(\frac{1}{2})} \otimes V^{(1)} \simeq V^{(\frac{1}{2})} \oplus V^{(\frac{3}{2})}$. On a affaire ici à un cas un peu plus subtil, en effet, il nous faudra compter à la fois les spineurs (et l'indice μ sera porté par une matrice γ) et les spins $\frac{3}{2}$ (et l'indice sera porté par une dérivée).

2.3 Théories supersymétriques

Une fois que l'on a bien compris la structure des symétries, nous arrivons à la question fondamentale : à quel point cette symétrie contraint-elle les corrections possibles ? En d'autre terme, si l'on considère un Lagrangien général, et qu'on lui impose d'être invariant sous une certaine supersymétrie, combien de paramètres libres restent-il à un ordre donné ? Nous allons donc calculer la variation du Lagrangien pour une superymétrie quelconque. Commençons par poser :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \alpha' \mathcal{L}_1 + \alpha'^2 \mathcal{L}_2 + \dots, \quad (2.22)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}_0 = \partial_\mu X \partial^\mu X + i \overline{\psi} \not{\partial} \psi, \quad (2.23)$$

$$\delta_\epsilon X = i \overline{\psi} \epsilon, \quad (2.24)$$

$$\delta_\epsilon \psi = \not{\partial} X \epsilon + \alpha' \delta_\epsilon^{(1)} \psi + \alpha'^2 \delta_\epsilon^{(2)} \psi + \dots. \quad (2.25)$$

On peut donc calculer la variation du Lagrangien :

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = 2 \partial_\mu X \partial^\mu (\delta_\epsilon X) + i \overline{\delta_\epsilon \psi} \not{\partial} \psi + i \overline{\psi} \not{\partial} (\delta_\epsilon \psi) + \alpha' \delta_\epsilon \mathcal{L}_1 + \alpha'^2 \delta_\epsilon \mathcal{L}_2 + \dots. \quad (2.26)$$

Bien sûr, nous calculons cette variation à un ordre fixé. Nous devons donc rassembler les termes selon leur ordre en α' . On se rappelle que le Lagrangien libre est invariant sous la supersymétrie libre. De plus, seule l'action doit être invariante, on peut donc effectuer des intégrations par parties sans changer le résultat. Après quelques calculs, il vient :

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \alpha' \left(2i \overline{\delta_\epsilon^{(1)} \psi} \not{\partial} \psi + \delta_\epsilon^{(0)} \mathcal{L}_1 \right) + \alpha'^2 \left(2i \overline{\delta_\epsilon^{(2)} \psi} \not{\partial} \psi + \delta_\epsilon^{(1)} \mathcal{L}_1 + \delta_\epsilon^{(0)} \mathcal{L}_2 \right) + \dots. \quad (2.27)$$

A ce stade, il est clair que la supersymétrisation à un ordre donné dépend des ordres inférieurs (\mathcal{L}_1 intervient à l'ordre α'^2). Nous allons donc procéder ordre par ordre. Commençons à l'ordre 1.

$\overline{2i\delta_\epsilon^{(1)}\psi\partial\psi} + \delta_\epsilon^{(0)}\mathcal{L}_1$ n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire de termes que l'on veut imposer comme étant une dérivée totale. Nous remarquons que nous avons $p = 2$ paramètres venant des termes du Lagrangien d'ordre 1, et q paramètres venant de la transformation de ψ (q dépend de la condition imposée). De plus, on peut compter le nombre de termes possibles au maximum dans la variation du Lagrangien. En effet, une telle variation est de la forme : $\delta_\epsilon\mathcal{L} = \alpha'\bar{\epsilon}\phi$. il suffit donc de compter les spineurs d'ordre 5, disons que l'on en trouve n . De même, nous pouvons compter le nombre de dérivées totales (noté m), de la même manière que ce que nous avons fait pour les termes du Lagrangien. Nous avons donc une combinaison linéaire de vecteur à $p + q$ paramètres dans un espace de dimension n (espace des variations) que l'on veut élément d'un sous-espace de dimension m (espace des dérivées totales). Cela revient à résoudre un système de $p + q$ inconnus à $n - m$ équations. Donc, il reste au moins $p + q + m - n$ paramètres indépendants. En fait il reste exactement $p + q + m - n$ paramètres, à moins que le système ne soit dégénéré. On peut penser que ce dernier cas n'apparaît pas sans raison. Pour l'ordre 2 (et plus généralement > 1), il y a une subtilité supplémentaire. En effet, on a toujours notre combinaison linéaire de termes due aux $\overline{2i\delta_\epsilon^{(2)}\psi\partial\psi} + \delta_\epsilon^{(0)}\mathcal{L}_2$. Par contre, il reste le terme à priori non nul $\delta_\epsilon^{(1)}\mathcal{L}_1$ mais déjà fixé par la supersymétrisation des ordres précédents. Nous ne voulons donc pas imposer notre combinaison de vecteurs comme étant une dérivée totale, mais comme étant égale à $-\delta_\epsilon^{(1)}\mathcal{L}_1$ modulo une dérivée totale. Le même calcul que précédemment nous donnera encore une estimation du nombre de paramètres libres, mais il peut arriver une seconde source de dégénérescence. En effet, le système sous-jacent n'est plus homogène, et peut donc n'admettre aucune solution. S'il en admet une, alors il en admet autant que dans le cas homogène.

Cette étude nous permet donc d'estimer le nombre de théories supersymétriques à un ordre donné, selon la condition sur l'algèbre imposée :

Nombre de corrections supersymétriques selon la condition algébrique imposée :

Ordre en α'	1	2	3	4	5
Condition Forte	0	0	-7	-19	-79
Condition faible	2	5	15	75	263

Remarquons qu'une valeur négative signifie qu'il n'existe au plus qu'une seule valeur des coefficients qui supersymétrise le Lagrangien (par exemple tous les coefficients nuls). Evidemment, uniquement si le système est non dégénéré. On notera que plus la valeur est négative, plus les chances sont réduites qu'une dégénérescence autorise tout de même une supersymétrisation.

2.4 Calcul explicite

Nous allons maintenant exposer le calcul explicite aux ordres les plus bas, afin de comparer avec les estimations obtenues précédemment. Ce travail a été effectué dans la condition faible, plus générale. Commençons donc par les corrections en α' . On montre facilement quelle est la forme

générale du Lagrangien ainsi que des transformations de ψ :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu X \partial^\mu X + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \alpha_1 \partial_\mu X \bar{\psi} \partial^\mu \psi + \alpha_2 \partial_\mu X \bar{\psi} \gamma^\mu \not{\partial} \psi, \quad (2.28)$$

$$\delta_\epsilon \psi = \not{\partial} X \epsilon + (a_1 \bar{\psi} \partial^\mu \psi \gamma_\mu + a_2 \bar{\psi} \gamma^\mu \not{\partial} \psi \gamma_\mu + a_3 \bar{\psi} \not{\partial} \psi + a_4 \partial_\mu X \partial^\mu X) \epsilon, \quad (2.29)$$

avec les (α_i) et (a_i) proportionnels à α' . Le calcul de $\delta_\epsilon \mathcal{L}$ montre que pour avoir une théorie supersymétrique, il faut que tous les coefficients soient nuls sauf a_2 et a_3 qui peuvent être quelconques. On a donc :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu X \partial^\mu X + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi, \quad (2.30)$$

$$\delta_\epsilon \psi = \not{\partial} X \epsilon + (a_2 \bar{\psi} \gamma^\mu \not{\partial} \psi \gamma_\mu + a_3 \bar{\psi} \not{\partial} \psi) \epsilon, \quad (2.31)$$

On constate donc que l'on retrouve le résultat obtenu dans l'analyse précédente. En effet, on avait estimé 2 paramètres libres après supersymétrisation, ce qui est le cas ici. De plus, ces coefficients n'apparaissent pas dans le Lagrangien lui-même. On a donc un résultat plus fort : **il n'y a pas de corrections supersymétriques à l'ordre α'** . Les paramètres restant témoignent plutôt d'une symétrie supplémentaire de la théorie libre. Notons que l'application de la condition mixte ne change pas le résultat, la condition forte impose $a_2 = 0$, et a_3 toujours quelconque. On voit que pour ces conditions, il apparaît une dégénérescence, on n'avait prédit aucun degré de liberté pour la condition forte, il en reste 1. Cependant, il ne change pas la constatation fondamentale.

Intéressons-nous maintenant à l'ordre α'^2 . La première remarque est que grâce au calcul précédent, on a montré que $\mathcal{L}_1 = 0$, le système associé à l'ordre 2 est donc homogène (cf. formule 2.27). Le Lagrangien général contient 6 termes d'ordre 2, et la transformation de ψ en contient 9. Le calcul donne pour Lagrangien supersymétrique :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu X \partial^\mu X + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \beta_1 (\partial_\mu X \partial^\mu X)^2 + \beta_2 (\partial_\mu X \partial^\mu X) \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \beta_3 \bar{\psi} \square \square \psi, \quad (2.32)$$

$$\delta_\epsilon \psi = \not{\partial} X \epsilon + (b_1 \partial_\mu X (\bar{\psi} \not{\partial} \psi) + b_2 \partial_\nu X (\bar{\psi} \gamma_\nu \partial^\mu \psi) + b_3 \partial_\nu X (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\nu \psi)) \gamma^\mu \epsilon \quad (2.33)$$

$$+ (\beta_3 \square \square X + (2i\beta_2 + 2b_3 + 4b_2) \partial_\mu X (\bar{\psi} \partial^\mu \psi) + b_1 \partial_\mu X (\bar{\psi} \gamma^\mu \not{\partial} \psi) \quad (2.34)$$

$$- 2b_2 \partial_\mu X (\bar{\psi} \not{\partial} \psi) \gamma^\mu + (\beta_2 - \beta_1) (\partial_\mu X \partial^\mu X) \partial_\mu X \gamma^\mu) \epsilon \quad (2.35)$$

L'essentiel ici est de retenir qu'il reste 6 paramètres libres (tous d'ordre α'^2), dont 3 dans le Lagrangien. On se souvient que l'étude précédente évaluait 5 paramètres libres. Il y a donc une petite dégénérescence. De plus, on peut remarquer que si l'on applique la condition mixte, on impose également $b_2 = b_3 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. La condition forte impose elle $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2$, il reste alors 2 paramètres libres alors qu'on n'en prévoyait aucun.

Conclusions

Rigidité de la supersymétrie

Notre étude a donc montré que la compréhension des représentations des algèbres de symétries fournit de nombreuses indications sur la structure des corrections d'ordre supérieur. Hors supersymétrie, nous avons classifié et compté toutes les corrections possibles selon leur ordre en α' . Nous avons également pu estimer la rigidité de la supersymétrie selon les différentes conditions imposées. Il semble en effet que la forte soit trop contraignante (il semble difficile de supersymétriser), alors que la faible laisse un grand nombre de degrés de liberté. De plus, dans le cas de la condition faible, les estimations semblent relativement précises, puisque le calcul explicite des bas ordres s'accorde à peu près.

Cependant, dans le cas de la condition forte, il semble que l'estimation soit trop imprécise. Il faudrait donc comprendre plus en profondeur le lien avec les différentes représentations. Pourquoi certains termes apparaissent dans la variation du Lagrangien et pas d'autres ? De même, une étude plus poussée des représentations pourrait permettre d'étudier la condition mixte à tout ordre. On notera également que l'estimation utilisée donne un nombre de paramètres libres, mais on ne peut savoir lesquels sont des degrés de liberté de l'action, et lesquels ne sont que des symétries supplémentaires. Là encore il semble important de comprendre plus en profondeur le lien entre représentations et supersymétrie.

Nous pouvons tenter de généraliser notre étude dans différentes directions. Nous pouvons par exemple étendre celle-ci au cas de la supergravité, il suffit alors de considérer le paramètre de supersymétrie ϵ comme étant local et non global. Nous pouvons également étudier le cas d'une théorie de jauge non abélienne (*cf.* appendice). Ce type d'étude peut aussi être appliquée pour l'analyse de l'entropie des trous noirs[11].

Conclusion personnelle

Ce stage m'a personnellement beaucoup apporté. J'ai en effet pu me familiariser avec la notion de supersymétrie, outil indispensable dans la majorité des théories au-delà du modèle standard. J'ai également beaucoup appris sur la théorie des représentations, qui est aujourd'hui très étudiée par les mathématiciens et a de nombreuses applications en physique.

Remerciements

Je tenais à remercier mes directeurs de stage, Pr. Samtleben et Pr. Gieres, pour leur disponibilité et leur aide tout au long de ce projet. J'aimerais également exprimer ma gratitude envers le personnel du laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon pour leur chaleureux accueil. Je remercie enfin P. Adroguer pour de nombreuses discussions fructueuses.

Annexe A

Formulaire sur les représentations

Afin d'être plus efficace lors des calculs de représentations, il peut être utile de se référer à certaines formules génériques. La première propriété remarquable est valable pour toute représentation U, V, W d'un groupe G quelconque : la somme directe distribue sur le produit tensoriel :

$$(U \oplus V) \otimes W = (U \otimes W) \oplus (V \otimes W). \quad (\text{A.1})$$

Maintenant, dans le cas précis de $so(3)$, il existe un grand nombre de formules intéressantes. Nous en présentons ici une liste non exhaustive :

$$Sym^n V^{(1)} = \bigoplus_{\alpha} V^{(n-2\alpha)}, \quad (\text{A.2})$$

$$W \otimes W = Sym^2 W \oplus \Lambda^2 W, \quad (\text{A.3})$$

$$Sym^2 (U \oplus W) = Sym^2 U \oplus (U \otimes W) \oplus Sym^2 W, \quad (\text{A.4})$$

$$Sym^n (Sym^p W) = Sym^p (Sym^n W). \quad (\text{A.5})$$

n, p sont des entiers naturels quelconques et U et W sont des représentations de $so(3)$ quelconques. Notons que les signes $=$ sous-entendent que les représentations de part et d'autre sont isomorphes.

Annexe B

Dualisation de Maxwell

Comme il est précisé dans l'introduction, notre théorie est reliée à la théorie de Maxwell par dualisation. En effet, à 3 dimensions, les équations de Maxwell dans le vide sont équivalentes à l'équation de D'Alembert sur un champ scalaire. Commençons par rappeler que la théorie de Maxwell s'exprime à l'aide du tenseur de Faraday $F_{\mu\nu}$ et de son dual $\tilde{F}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$ ¹. Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.1})$$

Mais il est connu que la variation de ce Lagrangien par rapport à $F_{\mu\nu}$ ne donne pas les bonnes équations du mouvement. En effet, $F_{\mu\nu}$ est lui-même la dérivée du potentiel A_μ : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Soit nous considérons que A_μ est la bonne variable, auquel cas la variation de l'action donne les bonnes équations, soit nous extrêmisons l'action par rapport à $F_{\mu\nu}$ mais sous la contrainte que c'est une dérivée totale. La première approche est standard, la seconde correspond à la dualisation. En effet, il convient alors d'ajouter à l'action un multiplicateur de Lagrange :

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda \partial_\mu \tilde{F}^\mu. \quad (\text{B.2})$$

Notons qu'ici λ est un multiplicateur de Lagrange local, c'est donc un champ (scalaire). L'extrémisation par rapport à λ redonne la contrainte, celle par rapport à $F_{\mu\nu}$ relie ce dernier à λ :

$$\partial_\mu \tilde{F}^\mu = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\tilde{F}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \partial_\mu \lambda. \quad (\text{B.4})$$

On peut donc tout exprimer par rapport au champ λ :

$$\tilde{F}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \partial_\mu \lambda, \quad (\text{B.5})$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \lambda = \square \lambda = 0. \quad (\text{B.6})$$

Ce qui revient à considérer le Lagrangien $\mathcal{L} = 2\partial_\mu \lambda \partial^\mu \lambda$.

Tous ces calculs, et plus généralement tous ceux autour d'une théorie de jauge, s'écrivent de façon élémentaire à l'aide de formes différentielles. F est alors la 2-forme $F^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$, et son

¹à $4d$, le dual est un tenseur d'ordre 2, mais à $3d$, c'est un vecteur

dual $*F = \tilde{F}^\mu dx_\mu$. On écrit l'action :

$$S = \int (F \wedge *F - \lambda dF), \quad (\text{B.7})$$

$$\text{donc } \delta S = \int (\delta F \wedge *F - \lambda d\delta F) \quad (\text{B.8})$$

$$= \int \delta F \wedge (*F - d\lambda) \quad (\text{B.9})$$

Les équations du mouvement donnent donc :

$$dF = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$*F = d\lambda. \quad (\text{B.11})$$

En exprimant l'action à l'aide de λ :

$$S = \int 2d\lambda \wedge *d\lambda. \quad (\text{B.12})$$

Annexe C

Théorie non abélienne

Une généralisation intéressante de notre étude serait de s'intéresser à des théories de jauge non abéliennes supersymétriques [12]. Comme pour Maxwell, la dualisation d'une théorie de jauge donne une théorie sur un champ scalaire et un spineur. Cependant, lorsque le groupe de jauge est non commutatif, il reste un champ de jauge vectoriel, mais celui-ci a sa cinétique décrit par un terme de type Chern-Simons, c'est donc un champ topologique. On considère donc une théorie avec N champ scalaire X^a et spineur ψ^a sur lesquels agit le groupe $SO(N)$. On choisit alors un sous-groupe G de $SO(N)$ qui est jaugé, c'est-à-dire dont la symétrie est rendu locale. Le champ de jauge A_μ est donc à valeur dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} associée à G . On peut exprimer l'inclusion $G \subset SO(N)$ via un tenseur de plongement [13] $\Theta_{\alpha\beta}$, qui représente la projection de $so(N)$ sur sa sous algèbre \mathcal{G} . On peut alors exprimer la dérivée covariante et le Lagrangien. En notant t_β les générateurs de l'algèbre $so(N)$, on a :

$$D_\mu X_a = \partial_\mu X_a - g A_\mu^\alpha \Theta_{\alpha\beta} (t^\beta)_{ab} X^b, \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{L} = D_\mu X_a D^\mu X^a + i \bar{\psi} \not{D} \psi + g \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu^\alpha \left(\partial_\nu A_\lambda^\beta - \frac{1}{3} g \Theta_{\gamma\delta} f_\epsilon^{\beta\delta} A_\nu^\gamma A_\lambda^\epsilon \right). \quad (\text{C.2})$$

On sera amené à y ajouter un terme de type masse et un potentiel (tous deux dépendant de X) : $\frac{i}{2} \bar{\psi}^a M_{ab} \psi^b$ et $g^2 V(X)$. On peut simplifier les notations et calculs en introduisant un formalisme analogue à Maxwell, c'est-à-dire à l'aide de formes différentielles. Si M désigne l'espace de Minkowski à $2 + 1$ dimensions, on a :

$$X \in C^\infty(M) \otimes \mathbb{R}^N, \quad (\text{C.3})$$

$$\psi \in C^\infty(M) \otimes (\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^2), \quad (\text{C.4})$$

$$A \in T^*M \otimes \mathcal{G}. \quad (\text{C.5})$$

$SO(N)$ agit sur \mathbb{R}^N . On généralise le produit extérieur, si $\alpha \otimes A \in \Lambda^n T^*M \otimes M_{pq}(\mathbb{R})$ et $\beta \otimes B \in \Lambda^m T^*M \otimes M_{qs}(\mathbb{R})$:

$$(\alpha \otimes A) \wedge (\beta \otimes B) = (\alpha \wedge \beta) \otimes (A.B). \quad (\text{C.6})$$

On peut alors écrire la dérivée covariante extérieure et l'action :

$$DX = dX - gA.X, \quad (\text{C.7})$$

$$S = \int_M (DX)^T \wedge *(DX) + i \bar{\psi} \not{D} \psi + g \operatorname{tr} \left(dA \wedge A - \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (\text{C.8})$$

On montre alors qu'on peut construire une transformation qui supersymétrise l'action :

$$\delta_\epsilon X = i\bar{\psi}\epsilon, \tag{C.9}$$

$$\delta_\epsilon \psi = D_\mu X \gamma^\mu \epsilon + g\Phi(X)\epsilon, \tag{C.10}$$

$$\delta_\epsilon A_\mu = i\bar{\epsilon}\gamma_\mu (X.\psi)^T - \psi.(X)^T. \tag{C.11}$$

Il existe alors toujours un potentiel $V(X)$, une matrice de masse $M(X)$ et un $\Phi(X)$ qui annulent la variation de l'action. Ceux-ci dépendent bien entendu du groupe G .

Bibliographie

- [1] Andres Collinucci, Mees de Roo, Martijn G.C. Eenink, *Derivative corrections in 10-dimensional super-Maxwell theory*, *JHEP* **01** (2003) 039.
- [2] Rajesh Kumar Gupta, Ashoke Sen, *Consistent truncation to three dimensional (super-)gravity*, *JHEP* **03** (2008) 015.
- [3] Sergei M. Kuzenko, Stefan Theisen, *Nonlinear Self-Duality and Supersymmetry*, *Fortschr. Phys.* **49** (2001) 1-3, 273-309.
- [4] William Fulton, Joe Harris, *Representation theory, a first course*, Springer-Verlag (1991).
- [5] Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences (1996).
- [6] Rached Mneimné, Frédéric Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann (1986).
- [7] Jean-Louis Basdevant, Jean Dalibard, *Mécanique quantique*, Les éditions de l'école Polytechnique (2006).
- [8] Yoshiaki Tanii, *Introduction to Supergravities in Diverse Dimensions*, arXiv :hep-th/9802138v1 (1998).
- [9] Martin F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, *Physics Report* 128, Nos. 2 & 3 (1985) 39-204.
- [10] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press (1992).
- [11] Bernard de Wit, *BPS Black Holes*, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* 171 :16-38 (2007).
- [12] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, PERSEUS BOOKS (1999).
- [13] Eric A Bergshoeff, Mees de Roo, Olaf Hohm, *Multiple M2-branes and the embedding tensor*, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008).