



## FORMATION

«*Science de la matière*»

*École Normale Supérieure de Lyon*  
*Université Claude Bernard Lyon 1*

STAGE 2009-2010

GERARDIN Antoine  
M2  
Physique

---

# Étude des contraintes de simplicité dans les modèles de mousses de spins

---

La gravité quantique à boucle est une tentative de quantification canonique de la théorie de la relativité générale. Si la cinématique est désormais bien comprise, la dynamique l'est beaucoup moins. Ces problèmes ont motivé l'introduction d'une seconde approche, covariante, où l'on tente de définir une intégrale de chemin pour la gravité quantique. Ce rapport s'intéresse à deux modèles d'intégrale de chemin, et plus particulièrement aux liens qui existent entre les deux approches.

**Mots clés :** gravité quantique, mousses de spins, quantification, contraintes de simplicité

Centre de Physique Théorique, Campus de Luminy  
Case 907, 13288 MARSEILLE Cedex 9 FRANCE

Maître de Stage : **Simone SPEZIALE**  
simone.speziale@gmail.com

Avril-Juillet 2010

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Le formalisme de la gravité quantique à boucle</b>	<b>2</b>
1.1 Différentes formulations de la relativité générale . . . . .	2
1.1.1 Le formalisme de Palatini . . . . .	2
1.1.2 Le formalisme de Plebanski . . . . .	3
1.2 La dynamique de la gravité quantique à boucle . . . . .	4
1.2.1 L'approche canonique . . . . .	4
1.2.2 L'approche covariante . . . . .	5
<b>2 Construction des modèles de mousses de spins</b>	<b>6</b>
2.1 Position du problème . . . . .	6
2.2 Quantification de la théorie BF . . . . .	6
2.2.1 Discrétisation de la théorie BF . . . . .	7
2.2.2 Calcul de la fonction de partition de la théorie BF . . . . .	8
2.3 Construction du modèle EPR . . . . .	9
2.3.1 Principe . . . . .	9
2.3.2 Implémentation des contraintes sur les bi-vecteurs . . . . .	10
2.3.3 Interprétation des contraintes . . . . .	11
2.3.4 Implémentation des contraintes sur les holonomies . . . . .	11
2.3.5 Existence d'une tétrade . . . . .	11
2.4 Le modèle alternatif DR . . . . .	12
2.4.1 Les contraintes . . . . .	12
2.4.2 Géométricit� de la triangulation . . . . .	12
<b>3 Comparaison des deux modèles</b>	<b>14</b>
3.1 La plan�t� des 4-simplexes implique leur recollement . . . . .	14
3.2 La courbure de la triangulation . . . . .	15
3.2.1 La courbure du 4-simplex dans le modèle EPR . . . . .	15
3.2.2 La courbure du 4-simplex dans le modèle DR . . . . .	16
3.3 Les degrés de liberté du 4-simplex . . . . .	17
3.3.1 Le 4-simplex dans le modèle EPR . . . . .	18
3.3.2 Le 4-simplex dans le modèle DR . . . . .	18
3.3.3 Interprétation et importance des cas dégénérés . . . . .	19
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>A Formalisme canonique de la gravité quantique à boucle</b>	<b>22</b>
<b>B Propriétés du groupe <math>SO(4)</math></b>	<b>24</b>

# Introduction

La gravité quantique à boucle (LQG) est une tentative de quantification de la théorie de la relativité générale (RG) utilisant le programme de quantification canonique introduit par Dirac.

La relativité générale est habituellement présentée comme une théorie de la métrique dans laquelle le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  est la variable fondamentale. La théorie peut alors être décrite par l'action de Einstein-Hilbert. Cependant, la formulation Hamiltonienne de cette action, d'abord réalisée par Arnowitt, Deser et Misner [1] à la fin des années cinquante, puis sa quantification canonique, mène à une équation très compliquée et mal définie.

La découverte par Ashtekar [2] de nouvelles variables, composées d'une tétrade et d'une connexion, a permis de décrire la relativité générale comme une théorie de jauge, la rapprochant ainsi des théories de Yang-Mills qui décrivent les trois autres interactions fondamentales [17]. Grâce à ces variables, le Hamiltonien s'écrit comme une somme de contraintes ayant une forme relativement simple. Deux d'entre elles décrivent les libertés de jauge de la théorie et la troisième, appelée contrainte Hamiltonienne, décrit la dynamique.

La cinématique de la théorie est aujourd'hui bien comprise [14] : l'espace de Hilbert est composé de réseaux de spins (graphes composés de points liés entre eux par des liens) qui décrivent la géométrie de l'espace. De plus, nous pouvons définir des opérateurs géométriques d'aire  $\hat{A}$  et de volume  $\hat{V}$  qui agissent sur ces états quantiques. L'un des premiers résultats de la théorie est la prédiction de spectres discrets pour ces opérateurs ( $\hat{A} \sim l_p^2$ ).

Cependant, la dynamique de la théorie, décrite par la contrainte Hamiltonienne, reste mal comprise et trop peu de solutions sont connues à ce jour. Une seconde approche a donc été développée, l'approche covariante, dans laquelle on tente de définir une intégrale de chemin pour la relativité générale.

Plutôt que de quantifier l'action de Einstein-Hilbert, qui fait intervenir la métrique comme variable fondamentale, il faut utiliser d'autres variables, similaires à celles utilisées dans l'approche canonique. Cela permet de calculer des transitions d'amplitudes entre les réseaux de spins qui décrivent l'espace à un temps fixé.

Pendant mon stage, je me suis intéressé à la description de deux modèles d'intégrale de chemin. Le premier modèle (EPR [10]) fournit une amplitude de transition et ainsi une proposition de théorie quantique. Cependant, une seconde approche [9] a été proposée par B. Dittrich et J. Ryan, émettant des doutes sur la procédure utilisée par EPR. Dans ce rapport, je m'attacherai à faire le lien entre ces deux modèles et à montrer qu'ils proposent tous les deux une procédure correcte de quantification bien qu'il existe des différences importantes.

Dans le premier chapitre, je présenterai une re-formulation de la relativité générale qui sera nécessaire pour la construction des deux modèles ; je donnerai également quelques résultats du formalisme canonique de la gravité quantique à boucle. Dans le deuxième chapitre, je décrirai les deux propositions de modèles de mousses de spins. Finalement, dans le dernier chapitre, j'étudierai les liens qui existent entre ces deux modèles.

# Chapitre 1

## Le formalisme de la gravité quantique à boucle

### 1.1 Différentes formulations de la relativité générale

#### 1.1.1 Le formalisme de Palatini

La relativité générale est habituellement décrite par l'action de Einstein-Hilbert où les variables dynamiques sont données par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ . Il s'agit d'une formulation du second ordre (le Lagrangien contient des dérivées secondes de la métrique) dont l'action est donnée par le scalaire de Ricci :

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} R[g_{\mu\nu}] \quad (1.1)$$

Le formalisme de Palatini est une re-formulation du premier ordre de la relativité générale où la métrique  $g_{\mu\nu}$  joue un rôle secondaire. L'avantage de ce formalisme est qu'il rapproche la relativité générale des théories de jauge.

Considérons une variété différentielle  $\mathcal{M}$  qui décrit l'espace-temps et un espace vectoriel  $V$  de dimension 4, appelé espace interne, et muni d'une métrique plate  $\eta_{IJ}$  de signature  $(-+++)$ . Dans ce rapport, les indices d'espace-temps seront décrits par des lettres grecques  $\mu, \nu, \dots$  et les indices internes par des lettres latines majuscules  $I, J, \dots$

La première variable est une tétrade  $e^I = e^I_{\mu} dx^{\mu}$ , il s'agit d'une 1-forme à valeurs dans  $V$  qui décrit le champ gravitationnel : à partir de cette variable, nous pouvons reconstruire une métrique par la relation  $g_{\mu\nu} = e^I_{\mu} e^J_{\nu} \eta_{IJ}$ . La seconde variable est une connexion de Lorentz  $\omega^{IJ} = \omega^{IJ}_{\mu} dx^{\mu}$  : il s'agit d'une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz  $so(3,1)$ . Elle définit une dérivée covariante qui agit dans l'espace interne  $D_{\mu} v^I = \partial_{\mu} v^I + \omega^{IJ}_{\mu} v^J$  et donne une notion de transport parallèle sur la fibre. L'action alternative de Einstein-Cartan s'écrit alors :

$$S_{EC}[e, \omega] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}[\omega] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e^I_{\mu} e^J_{\nu} F^{KL}_{\rho\sigma}[\omega] \quad (1.2)$$

où  $\epsilon_{IJKL}$  est le tenseur totalement antisymétrique tel que  $\epsilon_{01234} = 1$  et où  $F$  désigne la 2-forme courbure associée à  $\omega$  :  $F^{IJ}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \omega^{IJ}_{\nu} - \partial_{\nu} \omega^{IJ}_{\mu} + \omega^{IK}_{\mu} \omega^{KJ}_{\nu} - \omega^{IK}_{\nu} \omega^{KJ}_{\mu}$ .

En faisant varier l'action par rapport aux variables indépendantes  $e$  et  $\omega$ , nous obtenons les équations d'Einstein dans le vide pour la métrique définie par la relation  $g_{\mu\nu} = e^I_{\mu} e^J_{\nu} \eta_{IJ}$ .

- variation de l'action par rapport à la connexion :

nous obtenons  $D_\mu(ee^\mu_I e^\nu_J) = 0 \Rightarrow D_\mu(e^\nu_J) = 0$  si la tétrade est inversible. Cette équation assure que la connexion  $\omega$  est le pull-back de la connexion de Levi-Civita  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  (qui définit la dérivée covariante  $\nabla_\mu$  agissant sur les indices d'espace-temps).

- variation de l'action par rapport à la tétrade :

$$\delta S = 2 \int_{\mathcal{M}} e(e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\alpha^I e_K^\gamma e_L^\delta F_{\gamma\delta}^{KL}) \delta e_I^\alpha = 2 \int_{\mathcal{M}} e(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}) \eta^{IJ} e_J^\beta \delta e_I^\alpha$$

Nous obtenons les équations  $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0$  qui correspondent aux équations d'Einstein lorsque la connexion  $\omega$  est celle de Levi-Civita  $\Gamma$ . L'action (1.2) reproduit donc bien les équations d'Einstein dans le vide.

### Analyse des symétries

La théorie est bien sûr invariante par difféomorphismes d'espace-temps, mais l'introduction de la tétrade comme variable ajoute une seconde symétrie : deux tétrades liées entre elles par une rotation locale de Lorentz  $\Lambda_J^I$  sont équivalentes. En effet :

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ} = (\Lambda_I^K e_\mu^K) (\Lambda_J^L e_\nu^L) \eta_{KL}$$

Cette nouvelle symétrie se traduit par une invariance de jauge sous le groupe de Lorentz  $SO(3,1)$  pour les indices internes.

### Le paramètre d'Immirzi

L'action utilisée pour quantifier la relativité générale est une extension de l'action de Palatini. Il existe en effet un second terme de dimension 4, compatible avec toutes les symétries de la théorie. Ce terme est sans influence sur les équations classiques du mouvement (il donne une contribution nulle lorsque l'on étudie les variations de l'action par rapport à la tétrade) mais il intervient lors de la quantification (en particulier, il apparaît dans les valeurs propres des opérateurs d'aire et de volume). En ajoutant ce terme, nous obtenons l'action de Hölst [17] :

$$S_{LQG}[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}[\omega] + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \wedge F^{IJ}[\omega] \quad (1.3)$$

où  $\gamma$  est un nouveau paramètre de la théorie, appelé paramètre d'Immirzi.

Par la suite, nous ne tiendrons pas compte de ce paramètre d'Immirzi mais les résultats sont facilement généralisables.

#### 1.1.2 Le formalisme de Plebanski

Le champ fondamental, qui devient l'opérateur «  $\hat{q}$  » en LQG, est relié d'une façon simple à la 2-forme  $e \wedge e$ . C'est donc ce champ que nous aimerions utiliser pour décrire les modèles de mousses de spins dans le chapitre suivant. Je vais présenter une autre formulation de la relativité générale où cette 2-forme joue un rôle privilégié. Il s'agit du formalisme de Plebanski qui décrit la théorie de la relativité générale comme une théorie topologique BF contrainte.

La théorie BF est décrite par l'action :

$$S_{BF}[B, \omega] = \int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ}[\omega] \quad (1.4)$$

où les variables élémentaires sont une 2-forme  $B = B_{\mu\nu}^{IJ} \tau_{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(3,1)$ , et une connexion  $\omega$  qui définit la 2-forme courbure  $F_{IJ}$ . Les générateurs de l'algèbre sont notés  $\tau_{IJ}$ . Il s'agit d'une théorie topologique sans degrés de liberté locaux (cf. section 2.2). L'avantage de cette théorie est qu'elle est bien connue, aux niveaux classiques et quantiques.

Nous obtenons la théorie de la relativité générale en imposant des contraintes pour que la 2-forme  $B^{IJ}$  s'exprime sous la forme  $B^{IJ} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}_{KL} e^I \wedge e^J$  (à comparer avec l'action de Palatini (1.2)). Ces contraintes, appelées contraintes de simplicité, peuvent être implémentées à l'aide de multiplicateurs de Lagrange  $\Phi_{IJKL}$  :

$$S_P[B, \omega] = \int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ}[\omega] - \frac{1}{2} \Phi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL}$$

où le champ  $\Phi$  vérifie les contraintes supplémentaires :

$$\epsilon^{IJKL} \Phi_{IJKL} = 0 \quad \Phi_{IJKL} = \Phi_{KLIJ} \quad \Phi_{IJKL} = \Phi_{JIKL}$$

En faisant varier l'action par rapport aux multiplicateurs de Lagrange, nous obtenons les contraintes :

$$\epsilon_{IJKL} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\rho\sigma}^{KL} = e \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.5)$$

où  $e = \frac{1}{4!} \epsilon_{IJKL} B^{IJ} B^{KL}$ . Ces contraintes admettent quatre types de solutions :

$$\begin{aligned} I. \quad & B^{IJ} = \pm e^I \wedge e^J \\ II. \quad & B^{IJ} = \pm * e^I \wedge e^J = \pm \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L \end{aligned}$$

Le premier secteur correspond au secteur topologique et ne contribue pas à l'action classique (la variation de l'action par rapport à la tétrade donne une contribution nulle). Le second secteur correspond au secteur gravitationnel qui nous intéresse ici.

## 1.2 La dynamique de la gravité quantique à boucle

### 1.2.1 L'approche canonique

L'approche canonique repose sur la quantification du Hamiltonien de la relativité générale. L'utilisation de la métrique comme variable élémentaire (voir 1.1) conduit à un Hamiltonien très compliqué (formalisme ADM, [1]) à partir duquel il est très difficile d'obtenir des solutions exactes. L'introduction des variables de tétrade et de connexion dans l'action de Hölst (1.3) conduit à une formulation beaucoup plus simple de la relativité générale, où le Hamiltonien s'exprime comme une somme de trois contraintes, polynomiales dans les variables canoniques. Deux de ces contraintes décrivent les libertés de jauge de la théorie (invariance par difféomorphismes spatiaux et invariance sous l'action du groupe  $SU(2)$  pour les indices internes) et la troisième (la contrainte Hamiltonienne) décrit la dynamique de la théorie.

Dans le formalisme Hamiltonien, l'espace-temps est découpé en une hypersurface tridimensionnelle  $\Sigma$ , représentant l'espace, qui évolue selon la contrainte Hamiltonienne. Un des succès de la théorie quantique à boucle fut de trouver un espace de Hilbert décrivant ces hypersurfaces  $\Sigma$  à temps fixé : il est formé d'états, appelés réseaux de spins, (voir figure 1.1) qui permettent de mieux comprendre la cinématique de la théorie.

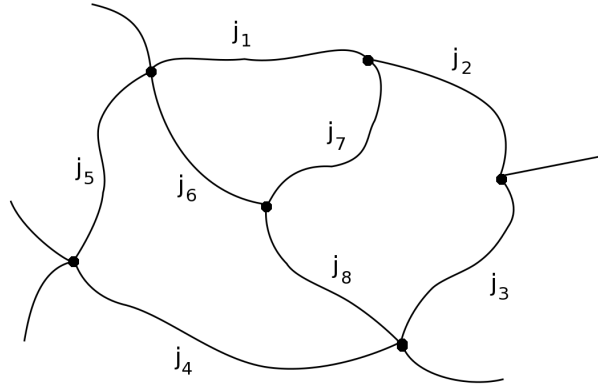


FIG. 1.1 – Exemple de réseau de spins : les liens sont indexés par des nombres quantiques  $j_l$  demi-entiers et les vertex par des nombres quantiques  $i_n$  (non représentés).

Sans entrer dans les détails ([14], annexe A), un réseau de spins correspond à un graphe constitué de vertex liés entre eux par des liens. À chaque lien est associé un nombre quantique  $j$  demi-entier (désignant une représentation irréductible de  $SU(2)$ ) et à chaque vertex est associé un nombre quantique  $i_v$ . Un réseau de spins est donc caractérisé par un triplet  $(\Gamma, j_l, i_v)$  où  $\Gamma$  représente le graphe. Ces réseaux de spins sont invariants sous l'action des deux groupes de jauge de la théorie. L'état quantique associé à un réseau de spins s'écrit  $\Psi_{[\Gamma, j_l, i_v]}(\omega)$  où  $\omega$  est la connexion.

De plus, ces réseaux de spins diagonalisent les opérateurs géométriques d'aire et de volume qui s'avèrent avoir un spectre discret. Cela permet de donner une interprétation géométrique simple : les vertex sont interprétés comme des grains d'espace (le numéro quantique associé  $i_v$  intervient dans le spectre de l'opérateur de volume) et les liens sont associés à l'aire qui sépare les deux grains d'espace ( $j_l$  intervient dans le spectre de l'opérateur d'aire).

Cependant, la contrainte Hamiltonienne, qui décrit la dynamique, est plus difficile à résoudre et nous ne connaissons pas actuellement de base de solutions suffisamment large pour exploiter la théorie.

### 1.2.2 L'approche covariante

Pour pallier ce problème, l'idée est d'utiliser, comme en théorie des champs, la méthode d'intégrale fonctionnelle pour décrire la dynamique de la théorie. Dans cette approche, on tente de définir une intégrale de chemin pour la relativité générale en discrétisant l'espace temps (modèle de mousses de spins). Puisque les variables canoniques de la LQG sont une tétrade et une connexion, nous utilisons l'action de Plebanski de préférence à celle d'Einstein-Hilbert qui fait intervenir la métrique. Dans la section suivante, nous nous intéresserons à la construction de deux modèles de mousses de spins que nous comparerons dans le dernier chapitre.

# Chapitre 2

## Construction des modèles de mousses de spins

### 2.1 Position du problème

Afin de calculer les transitions d'amplitude entre différents états, décrits par des réseaux de spins, nous aimerions donner un sens à la fonction de partition que nous pouvons écrire formellement sous la forme :

$$Z = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}[e] \mathcal{D}[\omega] e^{iS_{LQG}[e,\omega]}$$

Une méthode pour régulariser cette expression est de discrétiser la variété différentielle  $\mathcal{M}$  en choisissant une triangulation fixe de l'espace temps. Cependant, cette discrétisation brise l'invariance sous difféomorphismes de la théorie et réduit artificiellement le nombre de degrés de liberté. Il existe donc certaines ambiguïtés, notamment dans la manière d'imposer les contraintes : différents choix peuvent mener à des théories quantiques différentes.

Nous allons étudier dans ce rapport deux procédures différentes, l'une proposée par J. Engle, R. Pereira et C. Rovelli (modèle EPR [10]) et l'autre, proposée par B. Dittrich et J. Ryan (modèle DR [9]). Dans ces deux modèles, les auteurs commencent par discrétiser la théorie topologique BF (cf section 2.2.1) puis imposent des contraintes sur les variables discrètes pour retrouver la théorie de la relativité générale.

Dans la suite, nous nous intéresserons à la relativité générale euclidienne, c'est-à-dire à la métrique  $\eta_{IJ} = (1, 1, 1, 1)$ . L'algèbre de Lie  $so(3, 1)$  est donc remplacée par  $so(4)$ .

### 2.2 Quantification de la théorie BF

Le principe est d'approximer la variété différentielle  $\mathcal{M}$  par une variété plate par morceaux. Il est possible de montrer que toute variété différentielle peut être suffisamment bien approchée par une telle triangulation, à condition d'augmenter le nombre de simplexes.

La triangulation, notée  $\Delta$ , est formée de 4-simplexes, de tétraèdres, de triangles et de segments plats (droits) collés entre eux. Il sera également utile de définir le dual  $^*\Delta$  de la triangulation qui est construit de la manière suivante : nous plaçons un vertex au centre de chaque 4-simplex, puis lorsque deux 4-simplexes limitent un tétraèdre, nous lui associons, dans l'espace dual, un côté liant les deux vertex. Pour chaque triangle nous obtenons alors une face dont le nombre de côtés est quelconque : il correspond au nombre de tétraèdres qui entourent ce triangle. Pour un récapitulatif des notations, voir le tableau 2.1.



notation	triangulation $\Delta$	dual $*\Delta$
$v$	4-simplex	vertex
$t$	tétraèdre	côté
$f$	triangle	face
	segment	région 3d
	point	région 4d

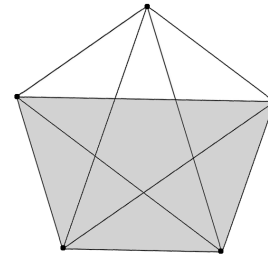


TABLE 2.1 – La triangulation  $\Delta$  et son dual  $*\Delta$  Représentation du 4-simplex : la partie grisée représente l'un des cinq tétraèdres.

Je vais expliciter le lien entre la triangulation et les réseaux de spins introduits dans la théorie canonique. Une coupe 3d de la triangulation 4d définit une hypersurface  $\Sigma$  qui représente l'espace. Le graphe  $\Gamma$ , support du réseau de spins, correspond alors au graphe dual de cette triangulation 3d, constituée de tétraèdres. En se limitant à ce type de triangulations, nous avons donc restreint l'espace de Hilbert total de la gravité quantique à boucle à un sous-espace de Hilbert correspondant aux graphes 4-valents (figure 2.1).

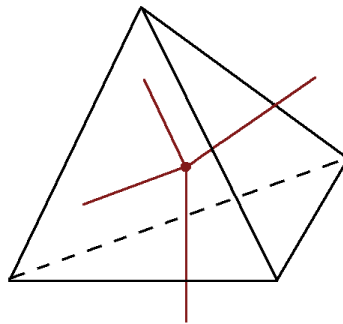


FIG. 2.1 – Le graphe dual (rouge) de la triangulation 3d (noir) est 4-valents

### 2.2.1 Discrétisation de la théorie BF

L'action de la théorie BF est donnée par :

$$S_{BF}[B, \omega] = \int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ}[\omega] = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}(B \wedge F[\omega]) \quad (2.1)$$

où les variables élémentaires sont une 2-forme  $B = B_{\mu\nu}^{IJ} \tau_{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(4)$  (les générateurs sont notés  $\tau_{IJ}$ ) et une connexion  $\omega$  de  $SO(4)$  qui définit la 2-forme courbure  $F_{IJ}$ . Déterminons les équations classiques de la théorie. En faisant varier l'action selon la variable  $\omega$ , nous obtenons  $d_\omega B = 0$  soit  $dB + \omega \wedge B = 0$  : la divergence du champ  $B$  est nulle. En faisant varier l'action selon la variable  $B$ , nous obtenons  $F = 0$  ce qui implique que l'espace-temps est plat. Ainsi, pour une topologie donnée, la solution est unique à une transformation de jauge près. Puisque la théorie ne possède pas de degrés de liberté locaux, le calcul de la fonction de partition  $Z$  est simplifié car nous nous attendons à ce que le choix de la triangulation ne joue aucun rôle : les résultats ne doivent pas dépendre de la triangulation.

#### Discrétisation de la première variable

La première variable à discrétiser est la 2-forme  $B^{IJ}$ . Il est naturel d'intégrer cette 2-forme sur les triangles  $f$  de la triangulation  $\Delta$ , nous obtenons alors des bi-vecteurs  $E_f^{IJ}$  associés aux triangles  $f$  et définis par la relation  $E_f^{IJ} = \int_f B^{IJ}$ .

### Discrétisation de la seconde variable

La seconde variable à discrétiser est la courbure. Dans l'espace dual, un côté est associé à chaque tétraèdre de la triangulation : nous pouvons donc lui associer un élément  $g_t \in SO(4)$  qui correspond à l'holonomie de la connexion le long de ce côté. Nous définissons alors  $U_f = g_{t_1^f} g_{t_2^f} \dots g_{t_n^f}$  l'holonomie discrète autour de la face  $f$  où  $t_1^f \dots t_n^f$  représente la chaîne de tétraèdres qui entoure le triangle (c'est-à-dire, dans l'espace dual, les côtés qui délimitent la face  $f$ ).

### 2.2.2 Calcul de la fonction de partition de la théorie BF

Au niveau discret, la théorie BF est donc décrite par une triangulation fixe de l'espace temps où nous associons à chaque face un bi-vecteur  $E_f^{IJ}$  et à chaque tétraèdre un élément  $g_t$  du groupe  $SO(4)$ .

L'action discrétisée de la théorie BF s'écrit :

$$S = \sum_{f \in \Delta} \text{Tr} [E_f U_f] \quad (2.2)$$

et la fonction de partition est donnée par :

$$Z = \int \prod_{f \in \Delta} dE_f \prod_{t \in \Delta} dg_t e^{i \text{Tr} [E_f U_f]} \quad (2.3)$$

où les intégrales sont définies par la mesure de Haar du groupe  $SO(4)$ . Après intégration sur les variables  $E_f$ , nous obtenons :

$$Z = \int \prod_{t \in \Delta} dg_t \prod_{f \in \Delta} \delta(U_f)$$

où  $\delta$  est la distribution delta définie sur  $\mathcal{L}^2(SO(4))$ . L'interprétation de ce résultat est simple : nous devons sommer sur l'ensemble des connexions plates (courbure nulle).

Nous utilisons ensuite la relation  $\delta(g) = \sum_{j \in \text{irrep}(SO(4))} \dim(j) \text{Tr}[\rho_j(g)]$  qui permet d'écrire la fonction  $\delta$  comme une somme sur les représentations irréductibles  $\rho$  de  $SO(4)$  ( $\dim(j)$  est la dimension de la représentation  $\rho_j$ ). Nous obtenons alors :

$$Z = \int \left( \prod_{t \in \Delta} dg_t \right) \prod_{f \in \Delta} \left( \sum_j \dim(j) \text{Tr}[\rho_j(g_{t_1^f} g_{t_2^f} \dots g_{t_n^f})] \right)$$

soit

$$Z = \sum_{j_1 \dots j_N} \prod_{f \in \Delta} \dim(j_f) \cdot \int \left( \prod_{t \in \Delta} dg_t \right) \prod_{f \in \Delta} \text{Tr}[\rho_{j_f}(g_{t_1^f} g_{t_2^f} \dots g_{t_n^f})]$$

où  $j_1 \dots j_N$  sont les nombres quantiques associés aux  $N$  faces du dual de la triangulation. Il y a une intégrale par côté  $t$  or, dans l'espace dual, chaque côté appartient exactement à quatre faces, les intégrales sont donc de la forme :

$$\int dg \rho_{j_1}(g)_{a'}^a \rho_{j_2}(g)_{b'}^b \rho_{j_3}(g)_{c'}^c \rho_{j_4}(g)_{d'}^d = \sum v_i^{abcd} v_{a'b'c'd'}^i$$

où  $v^i$  est une base d'entrelaceurs<sup>1</sup> entre les représentations  $j_1 \dots j_4$ . Chacun des deux tenseurs invariant  $v$  est lié à l'un des deux vertex du côté  $t$ . Or, chaque vertex appartient à cinq liens (le 4-simplex est constitué de cinq tétraèdres) : nous avons donc cinq tenseurs  $v_i$  qui se contractent au niveau de chaque vertex. De plus, l'ordre de la contraction des index définit les symboles  $\{15j\}$  :

$$\{15j\} = \sum_{a_1 \dots a_{10}} v_{i_1}^{a_1 a_6 a_9 a_5} v_{i_2}^{a_2 a_7 a_{10} a_1} v_{i_3}^{a_3 a_7 a_8 a_2} v_{i_4}^{a_4 a_9 a_7 a_3} v_{i_5}^{a_5 a_{10} a_8 a_4}$$

où l'indice  $a_k$  est dans la représentation  $k$ . Finalement, nous obtenons la fonction de partition pour la théorie BF :

$$Z = \sum_{j_f, i_t} \prod_f \dim(j_f) \prod_v \{15j\}_v$$

où nous sommes sur les représentations sur chaque face et sur les entrelaceurs sur chaque côté. Cette dernière relation définit une fonction de partition pour la théorie BF quantique. Il est possible de montrer que cette somme est topologiquement invariante et indépendante de la triangulation [8].

## 2.3 Construction du modèle EPR

### 2.3.1 Principe

L'action à discrétiser est l'action de Plebanski qui décrit une théorie BF contrainte :

$$S_P[B, \omega] = \int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ}[\omega] - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \Phi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL}$$

Plutôt que de discrétiser l'action dans son ensemble sur une triangulation fixe, nous allons utiliser les résultats de la section précédente sur la théorie BF. Nous appliquerons ensuite les contraintes (2.7) au niveau discret pour retrouver la théorie de la relativité générale. Ces contraintes peuvent ensuite être élevées au rang d'opérateurs et appliquées au niveau quantique sur les réseaux de spins. De manière intuitive, nous pouvons nous attendre à une restriction sur les spins et sur les entrelaceurs dans la fonction de partition de la théorie BF. Je ne traiterai pas cette dernière partie de la quantification qui est détaillée dans l'article [10].

### Discrétisation des variables

Comme pour la théorie BF, nous associons un bi-vecteur  $E_f^{IJ}(t)$  par face et par tétraèdre. Nous allons maintenant discrétiser la courbure.

Puisque les 4-simplexes sont plats, nous pouvons choisir un système de coordonnées cartésiennes qui couvre l'ensemble d'un 4-simplex. Mais en général, la triangulation n'est pas plate et nous ne pouvons pas étendre ce système de coordonnées à plusieurs 4-simplexes  $\{v_f^1, v_f^2, \dots, v_f^n\}$  qui entourent un triangle  $f$ .

Notons  $e(t) = e_a^I(t) v_I dx^a$  une base orthonormale pour chaque tétraèdre  $t$  où  $v_I$  est une base de  $\mathbb{R}^4$  fixée une fois pour toute, et  $e(v) = e_a^I(v) v_I dx^a$  une base orthonormée recouvrant

1. les entrelaceurs correspondent à des tenseurs invariants sous l'action de  $SU(2)$ , ils sont définis dans l'annexe A

l'ensemble du 4-simplex. Notons  $t_A$ ,  $A = 1\dots 5$  les cinq tétraèdres qui forment le 4-simplex  $v$ , il existe alors cinq matrices de rotation  $V_{vt_A} \in SO(4)$  telles que :

$$e(v)_a^I = (V_{vt_A})^I_J e(t_A)^J_a \quad (2.4)$$

Nous définissons ensuite les éléments  $U_{t_A t_B}$  qui décrivent le transport parallèle entre deux tétraèdres voisins  $t_A$  et  $t_B$  par la relation :

$$e(t_A) = U_{t_A t_B}(v) e(t_B) \quad \text{avec} \quad U_{t_A t_B}(v) = (V_{vt_A})^{-1} V_{vt_B} = V_{t_A v} V_{vt_B} \quad (2.5)$$

Notons  $t_1 \dots t_n$  les tétraèdres autour de la face  $f$  et  $v_{12} \dots v_{n1}$  la chaîne de 4-simplexes où  $t_2$  représente le tétraèdre entre les 4-simplexes  $v_{12}$  et  $v_{23}$ . La courbure associée à  $f$  est définie par :

$$U_f(t_1) = U_{t_1 t_2}(v_{12}) \dots U_{t_n t_1}(v_{n1}) = V_{t_1 v_{12}} V_{v_{12} t_2} \dots V_{t_n v_{n1}} V_{v_{n1} t_1} \quad (2.6)$$

c'est-à-dire par le produit des matrices de rotation autour de la face  $f$ . Les matrices  $V$  étant associées aux tétraèdres, c'est-à-dire aux côtés de l'espace dual, nous pouvons interpréter  $U_f(t)$  comme l'holonomie autour de la face  $f$  (les matrices  $V$  sont à rapprocher aux éléments  $g_t$  définis dans la théorie BF). Attention à ne pas confondre les éléments  $U_f(t)$  (courbure associée à une face) et  $U_{tt'}(v)$  (matrice de transport parallèle entre deux tétraèdres).

L'étape suivante consiste à trouver les contraintes que nous devons imposer à ces variables, au niveau classique, pour retrouver la théorie de la relativité générale.

### 2.3.2 Implémentation des contraintes sur les bi-vecteurs

Dans la théorie continue, les contraintes de simplicité sur les bi-vecteurs  $E$  sont données par :

$$\epsilon_{IJKL} E_{\mu\nu}^{IJ} E_{\rho\sigma}^{KL} = e \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.7)$$

où  $e = \frac{1}{4!} \epsilon_{IJKL} E^{IJ} E^{KL}$ . Il s'agit de trouver une version discrète de ces contraintes.

En intégrant la relation (2.7) sur un triangle  $f$ , appartenant au tétraèdre  $t$ , nous obtenons la première contrainte de simplicité sur les bi-vecteurs :

$$*E_f(t) \cdot E_f(t) = 0 \quad (2.8)$$

En effectuant cette même intégration sur deux triangles  $f$  et  $f'$ , appartenant au même tétraèdre  $t$ , nous obtenons la seconde contrainte de simplicité :

$$*E_f(t) \cdot E_{f'}(t) = 0 \quad (2.9)$$

Finalement, en intégrant la relation (2.7) sur l'ensemble du tétraèdre  $t$ , et en notant  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  ses quatre faces, nous obtenons la contrainte de Gauss :

$$E_{f_1}^{IJ}(t) + E_{f_2}^{IJ}(t) + E_{f_3}^{IJ}(t) + E_{f_4}^{IJ}(t) = 0 \quad (2.10)$$

Nous avons donc trois types de contraintes pour les bi-vecteurs : les deux contraintes de simplicité et la contrainte de Gauss.

### 2.3.3 Interprétation des contraintes

Nous pouvons donner une interprétation géométrique de ces contraintes : la première contrainte de simplicité assure que les bi-vecteurs sont simples (c'est-à-dire de la forme  $a \wedge b$ ) alors que la seconde contrainte de simplicité assure que deux bi-vecteurs, associés à des faces voisines, partagent un facteur en commun (ils sont de la forme  $e \wedge a$  et  $e \wedge b$  et génèrent donc un espace tridimensionnel). Finalement, la contrainte de Gauss assure la fermeture des bi-vecteurs appartenant à un même tétraèdre.

### 2.3.4 Implémentation des contraintes sur les holonomies

Il reste une dernière contrainte à imposer : puisque nous avons supposé que les 4-simplexes étaient plats, les matrices  $U_{tt'}(v)$  qui définissent le transport parallèle ne sont pas quelconques. D'après les relations (2.4) et (2.5), nous pouvons écrire :

$$U_{t_A t_B}(v) = (V_{vt_A})^{-1} V_{vt_B} = V_{t_A v} V_{vt_B} , \quad (2.11)$$

cette dernière relation correspond à la contrainte de planéité dans le modèle EPR, elle assure que les 4-simplexes sont effectivement plats.

Il s'agit maintenant de vérifier que ces contraintes suffisent à décrire la théorie de la relativité générale, c'est-à-dire que les bi-vecteurs  $E_f^{IJ}$  sont issus d'une tétrade.

### 2.3.5 Existence d'une tétrade

Je vais vérifier que les quatre contraintes (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11) assurent l'existence d'une tétrade sur l'ensemble des 4-simplexes et donc que nous retrouvons bien la théorie de la relativité générale.

Si nous supposons les bi-vecteurs linéairement indépendants, les contraintes de simplicité et de Gauss assurent que les bi-vecteurs sont simples et que deux bi-vecteurs appartenant à des faces voisines partagent un facteur en commun. Nous pouvons alors démontrer l'existence d'une tétrade  $e(t)$  sur chaque tétraèdre  $t$  (la démonstration est donnée dans [10]).

La contrainte de planéité  $U_{tt'}(v) = V_{tv} V_{vt'}$  permet ensuite d'étendre l'existence d'une tétrade sur l'ensemble du 4-simplex : puisqu'il existe une tétrade sur chaque tétraèdre  $t$ , nous avons :  $\forall t \in v, E_f^{IJ}(t) = \int_f e^I(t) \wedge e^J(t)$ . Nous définissons alors la tétrade sur le 4-simplex  $v$  par la relation  $E_f^{IJ}(v) = (V_{vt})^I{}_K (V_{vt})^J{}_L E_f^{KL}(t)$ ,  $V_{vt}$  étant définie en (2.4). Pour que cette définition ait un sens, il suffit de démontrer que l'expression ne dépend pas du tétraèdre choisi,  $t$  ou  $t'$  :

$$E_f^{IJ}(v) = (V_{vt})^I{}_K (V_{vt})^J{}_L E_f^{KL}(t) = \int_f (V_{vt} \cdot e(t))^I \wedge (V_{vt} \cdot e(t))^J$$

$$E_f^{IJ}(v) = (V_{vt'})^I{}_K (V_{vt'})^J{}_L E_f^{KL}(t') = \int_f (V_{vt'} \cdot e(t'))^I \wedge (V_{vt'} \cdot e(t'))^J$$

Or  $(V_{vt})^I{}_J e(t)^J = (V_{vt})^I{}_J (U_{tt'})^J{}_K e(t')^K = (V_{vt})^I{}_J (V_{tv})^J{}_L (V_{vt'})^L{}_K e(t')^K = (V_{vt'})^I{}_K e(t')^K$ , les deux expressions sont donc égales, ce qui démontre l'indépendance du choix du tétraèdre et l'existence d'une tétrade sur l'ensemble du 4-simplex.

## 2.4 Le modèle alternatif DR

Un second modèle de mousses de spins a été proposé par Bianca Dittrich et James Ryan [9]. Plutôt que de discrétiser l'ensemble de l'espace-temps, ils discrétisent une hypersurface 3d qui évolue dans le temps. Nous allons voir que les contraintes imposées sont différentes de celles du modèle EPR. Il est donc intéressant d'étudier les conséquences de ce choix.

### 2.4.1 Les contraintes

Dans ce modèle, les auteurs commencent par discrétiser la théorie topologique BF sur une hypersurface 3d (qui représente l'espace à un temps fixé) à l'aide de tétraèdres, de triangles et de segments plats (droits). Ils proposent ensuite d'appliquer les contraintes suivantes :

Pour chaque triangle  $f$ , la contrainte de simplicité :

$${}^*E_f(t) \cdot E_f(t) = 0 \quad (2.12)$$

Pour deux triangles  $f$  et  $f'$  appartenant à un même tétraèdre  $t$ , la deuxième contrainte de simplicité :

$${}^*E_f(t) \cdot E_{f'}(t) = 0 \quad (2.13)$$

Pour deux triangles  $f$  et  $f'$  partageant un côté et appartenant à deux tétraèdres voisins  $t$  et  $t'$ , la contrainte de recollement :

$${}^*E_f(t) M_{tt'} E_{f'}(t') = 0 \quad (2.14)$$

où nous avons défini  $(M_{tt'})^{IJ}_{KL} = (U_{tt'})^I_{[K} (U_{tt'})^J_{L]}$ , la matrice d'holonomie agissant sur un bi-vecteur.

Finalement, les auteurs imposent les contraintes de Gauss sur chaque tétraèdre  $t$  :

$$E_{f_1}^{IJ}(t) + E_{f_2}^{IJ}(t) + E_{f_3}^{IJ}(t) + E_{f_4}^{IJ}(t) = 0 \quad (2.15)$$

### 2.4.2 Géométrie de la triangulation

Je vais montrer que sous certaines hypothèses la contrainte de recollement (associée aux contraintes de simplicité et de Gauss) assure la géométrie de la triangulation 3d, c'est-à-dire que les bi-vecteurs peuvent être décrits de manière consistante à l'aide de vecteurs, associés aux côtés de la triangulation. Cela prouvera l'existence d'une tétrade et donc que les contraintes sont suffisantes pour retrouver la théorie de la relativité générale au niveau discret.

Considérons un tétraèdre  $\{i\}$  et les quatre bi-vecteurs associés. Nous avons vu que la première contrainte de simplicité (2.12) impose aux bi-vecteurs d'être simples :  $E_{ij} = a \wedge b$  et que la deuxième contrainte de simplicité (2.13) permet d'écrire les deux bi-vecteurs, appartenant à des faces voisines, sous la forme  $E_{ij} = a \wedge b$  et  $E_{ik} = a \wedge c$ . De plus, dans le cas où le tétraèdre est non dégénéré, ce facteur commun est unique à un facteur de normalisation près. En se limitant au cas non dégénéré, et en utilisant les contraintes de Gauss (2.15) nous pouvons alors écrire les quatre bi-vecteurs sous la forme :

$${}^*E_{ij} = \sigma s \wedge t, \quad {}^*E_{ik} = \sigma t \wedge u, \quad {}^*E_{il} = \sigma u \wedge s, \quad {}^*E_{im} = \sigma(u - s) \wedge (t - s)$$

Considérons maintenant deux tétraèdres voisins  $\{i\}$  et  $\{j\}$  (la face commune entre ces deux tétraèdres est donc la face  $ij$ ). En se limitant au secteur gravitationnel (le secteur topologique se traite de manière similaire) et à des tétraèdres non dégénérés, nous avons, d'après les contraintes de simplicité et de Gauss :

$$\begin{aligned} *E_{ij} &= \sigma s \wedge t & *M_{ij}E_{ji} &= \sigma' s' \wedge t' \\ *E_{ik} &= \sigma t \wedge u & *M_{ij}E_{jk'} &= \sigma' t' \wedge u' \\ *E_{il} &= \sigma u \wedge s & *M_{ij}E_{jl'} &= \sigma' u' \wedge s' \\ *E_{im} &= \sigma(u - s) \wedge (t - s) & *M_{ij}E_{jm'} &= \sigma'(u' - s') \wedge (t' - s') \end{aligned}$$

où  $\sigma, \sigma' = \pm 1$ .

Le transport parallèle entre les tétraèdres  $\{i\}$  et  $\{j\}$  s'écrit  $E_{ji} = -M_{ji}E_{ij}$ , donc  $s \wedge t \sim s' \wedge t'$  et ces deux bi-vecteurs génèrent le même espace bi-dimensionnel. En particulier, nous avons  $t' = \alpha' s + \beta' t$ .

Si nous supposons, de plus, que les normales aux tétraèdres ne sont pas parallèles, alors  $\text{Vect}(s, t, u) \neq \text{Vect}(s', t', u')$ , et puisque  $s \wedge t \sim s' \wedge t'$ , nous en déduisons que  $u$  et  $u'$  génèrent un espace bi-dimensionnel. De plus, la contrainte de recollement entre les bi-vecteurs  $E_{ik}$  et  $E_{jk'}$  nous assure que les vecteurs  $t, u, t'$  et  $u'$  génèrent un espace tridimensionnel. Nous pouvons donc, sans perte de généralité, écrire  $t'$  comme combinaison linéaire de  $u, u'$  et  $t$  :  $t' = \alpha t + \beta u + \delta u' = \alpha' s + \beta' t$ .

Soit  $w$  un vecteur normal aux vecteurs  $t, u$  et  $u'$ . Puisque  $s \notin \text{Vect}(t, u, u')$  (les normales aux tétraèdres  $\{i\}$  et  $\{j\}$  ne sont pas parallèles par hypothèse), le produit scalaire de  $w$  avec  $t'$  donne  $\alpha' = 0$  et  $t' = \beta' t$ . De la même manière, nous pouvons montrer que  $s' = \beta s$ . Finalement, le transport parallèle impose la relation  $\sigma = -\sigma' \alpha \beta$ , soit :

$$\begin{aligned} *E_{ij} &= \sigma s \wedge t & *M_{ij}E_{ji} &= \sigma s \wedge t \\ *E_{ik} &= \sigma t \wedge u & *M_{ij}E_{jk'} &= -\sigma \beta^{-1} t \wedge u' \\ *E_{il} &= \sigma u \wedge s & *M_{ij}E_{jl'} &= -\sigma \alpha^{-1} u' \wedge s \\ *E_{im} &= \sigma(u - s) \wedge (t - s) & *M_{ij}E_{jm'} &= \sigma \alpha^{-1} \beta^{-1} (u' - \beta s) \wedge (\alpha t - \beta s) \end{aligned}$$

D'après la contrainte de recollement entre les bi-vecteurs  $E_{im}$  et  $E_{jm'}$ , les vecteurs  $(u - s)$ ,  $(t - s)$ ,  $(u' - \beta s)$  et  $(\alpha t - \beta s)$  génèrent un espace tridimensionnel, donc :

$$a(u - s) + b(t - s) + c(u' - \beta s) + d(\alpha t - \beta s) = 0, \quad (2.16)$$

En prenant le produit scalaire de cette expression avec deux vecteurs  $w_1$  et  $w_2$ , respectivement normaux aux tétraèdres  $\{i\}$  et  $\{j\}$ , nous obtenons :  $\alpha = \beta$  et donc  $\alpha = \beta = 1$  ce qui démontre le résultat.

Ainsi, dans le cas où les tétraèdres ne sont ni parallèles ni dégénérés (ce sera le cas lorsque nous nous intéresserons au bord d'un 4-simplex), nous pouvons associer de manière consistante un vecteur à chaque côté de la triangulation. Cela assure l'existence d'une métrique et donc d'une tétrade sur l'ensemble de la triangulation.

# Chapitre 3

## Comparaison des deux modèles

J'ai présenté deux modèles de mousses de spins pour déterminer la dynamique de la LQG qui semblent, à première vue, différents. Mais des discussions nous ont amenés à nous poser la question de leur équivalence éventuelle. Dans le modèle EPR, l'une des contraintes assure la planéité des 4-simplexes, mais dans le modèle DR, la planéité des 4-simplexes n'est plus imposée directement : les auteurs introduisent une nouvelle contrainte, celle de recollement, qui nous assurent que les tétraèdres se recollent bien les uns avec les autres. Cette nouvelle contrainte doit-elle être implémentée dans le modèle EPR ? Quelles sont ses conséquences sur la triangulation ?

Dans ce chapitre, je vais comparer les deux modèles décrits plus haut. Bien qu'ils décrivent tous les deux la relativité générale, nous verrons que déjà au niveau classique, ces modèles ne sont pas équivalents.

### 3.1 La planéité des 4-simplexes implique leur recollement

Je vais montrer que la contrainte de planéité, imposée dans le modèle EPR, implique la contrainte de recollement du modèle DR. Il n'est donc pas nécessaire d'implémenter cette contrainte dans le premier modèle.

Considérons deux bi-vecteurs associés aux triangles  $f$  et  $f'$ . Nous supposons que ces triangles partagent un segment  $e$  et qu'ils appartiennent à des tétraèdres voisins  $\{i\}$  et  $\{j\}$  (la face commune aux deux tétraèdres est notée  $f_0$ ). Dans le modèle DR, nous sommes donc dans le cas où la contrainte de recollement s'applique et c'est elle qui assure le recollement selon le côté  $e$ .

Les tétraèdres  $\{i\}$  et  $\{j\}$  étant voisins, il existe une chaîne de 4-simplexes autour de la face  $f_0$  permettant de passer de l'un à l'autre (pour s'en convaincre, il peut être utile d'étudier le cas plus simple, en dimension trois, où les 4-simplexes sont remplacés par des tétraèdres, les tétraèdres par des triangles, etc). Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait que trois 4-simplexes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  dans la chaîne (figure 3.1), la généralisation à un nombre quelconque de 4-simplexes est immédiate. Grâce aux contraintes de simplicité, les bi-vecteurs des faces  $f$  et  $f_1$  s'écrivent respectivement sous la forme  $e \wedge a_1$  et  $e \wedge b_1$  où  $e$  est le côté en commun. De même les bi-vecteurs des faces  $f'$  et  $f_2$  s'écrivent respectivement sous la forme  $e' \wedge a_2$  et  $e' \wedge b_2$  où  $e'$  est le côté en commun. A priori, il n'y a aucune raison pour que nous ayons  $e = e'$  puisque les contraintes de simplicité s'appliquent dans un tétraèdre sans



considérer les tétraèdres voisins (voir les formules (2.8) et (2.9)). Pour que la géométricit  de la triangulation soit assurée, il suffit de montrer que  $e = e'$  et donc que le côté  $e$  ne dépend pas des bi-vecteurs utilisés.

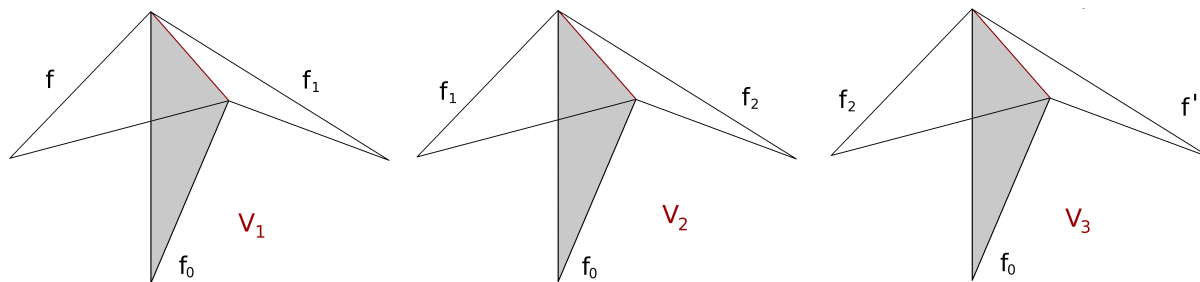


FIG. 3.1 – Les 4-simplexes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  autour de la face  $f_0$  sont représentés par leur cinq vertex. Deux 4-simplexes voisins partagent un même tétraèdre : le tétraèdre défini par  $f_0$  et  $f_1$  est commun aux 4-simplexes  $v_1$  et  $v_2$ . Le segment  $e$  en commun est marqué en rouge.

Puisque le 4-simplex  $v_1$  est plat, nous savons que le segment  $e$ , généré par les triangles  $f$  et  $f_1$  ou par les triangles  $f_1$  et  $f_0$  est le même. Mais deux triangles  $f_1$  et  $f_0$ , qui appartiennent au 4-simplex  $v_1$ , appartiennent également au 4-simplex  $v_2$  et la planéité de ce dernier nous assure que le segment  $e$  est généré par les triangles  $f_0$  et  $f_2$ . En utilisant le même argument, mais cette fois dans le 4-simplex  $v_3$ , nous pouvons montrer que le segment  $e$  est généré par les triangles  $f_2$  et  $f'$ . Nous avons donc montré que le segment  $e$  ne dépend pas du choix des bi-vecteurs utilisés, ce qui démontre le recollement.

Dans le modèle DR nous avons forcé le recollement des tétraèdres en appliquant une nouvelle contrainte, celle de recollement, qui est absente dans le modèle EPR. Mais je viens de montrer que le recollement est assuré par la planéité des 4-simplexes : nous n'avons donc pas besoin d'introduire cette nouvelle contrainte dans le premier modèle.

## 3.2 La courbure de la triangulation

Je vais maintenant étudier l'influence des contraintes de planéité et de recollement sur la courbure de la triangulation. Nous verrons que, si les 4-simplexes sont plats dans le modèle EPR, ils ne le sont plus dans le modèle DR. Cela montrera que la contrainte de recollement n'implique pas celle de planéité et que les deux modèles ne sont pas équivalents.

### 3.2.1 La courbure du 4-simplex dans le modèle EPR

Par hypothèse, les 4-simplexes sont plats. Cependant, la triangulation la plus générale est obtenue en collant plusieurs 4-simplexes les uns aux autres. Nous allons voir que la planéité des 4-simplexes n'implique pas celle de la triangulation et que le modèle permet bien de décrire des espace-temps courbes.

Pour commencer, considérons un cas plus simple en dimension deux : la triangulation est formée de triangles plats collés les uns aux autres au niveau de leurs côtés. La somme des angles autour d'un vertex peut alors être différente de  $2\pi$ . En particulier, nous pouvons imaginer que ces triangles plats soient collés entre eux de manière à former un d me. Dans ce cas, la courbure est concentrée au niveau des vertex.

En dimension 4, les triangles, les tétraèdres et les 4-simplexes sont plats mais la courbure est maintenant concentrée sur les triangles. Autour de chaque triangle, il existe une chaîne de 4-simplexes : la somme des angles diédraux entre les tétraèdres délimitant ces 4-simplexes peut être différente de  $2\pi$ , c'est cet angle de déficit qui traduit la courbure de la triangulation.

### 3.2.2 La courbure du 4-simplex dans le modèle DR

Je vais montrer que, bien qu'elle implique le recollement des tétraèdres entre eux, la contrainte de recollement n'assure pas la planéité du 4-simplex.

#### Un exemple

Considérons un 4-simplex et supposons que la connexion soit plate sur l'ensemble du 4-simplex, excepté sur le triangle  $f_0$  où elle est a priori quelconque.

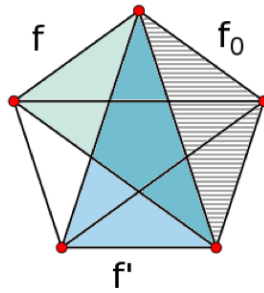


FIG. 3.2 – Le tétraèdre  $t$  est formé par les triangles  $f$  et  $f_0$ , le tétraèdre  $t'$  par les triangles  $f'$  et  $f_0$  et le tétraèdre  $t''$  par les triangles  $f$  et  $f'$ .

Soit deux triangles,  $f$  et  $f'$ , appartenant respectivement aux tétraèdres  $t$  et  $t'$ . Supposons que ces triangles partagent un côté  $e$  avec le triangle  $f_0$  commun aux tétraèdres  $t$  et  $t'$  (figure 3.2). Appelons  $t''$  le tétraèdre formé par  $f$  et  $f'$ . D'après la contrainte de recollement (2.14) :

$${}^*E_f(t)M_{tt'}E_{f'}(t') = 0 \quad \text{avec} \quad (M_{tt'})^{IJ}_{KL} = (U_{tt'})^I_K(U_{tt'})^J_L, \quad (3.1)$$

mais puisque la connexion est plate sur l'ensemble de la triangulation, excepté sur le triangle  $f_0$ , nous avons aussi  $E_f(t) = E_f(t'')$  et  $E_{f'}(t') = E_{f'}(t'')$ . Dans le tétraèdre  $t''$ , ces deux bi-vecteurs vérifient les contraintes de simplicité et peuvent donc s'écrire sous la forme  $E_f(t'') = e \wedge a$  et  $E_{f'}(t'') = e \wedge b$ . Nous en déduisons qu'une condition suffisante pour que la relation (3.1) soit valable, est que le vecteur  $e$  reste invariant sous l'action de la matrice  $M_{tt'}$ . En effet, dans ce cas, la contrainte de recollement se réduit à la contrainte de simplicité.

Jusqu'ici, nous avons considéré un seul côté  $e$  du triangle  $f_0$ , nous pouvons itérer l'argument pour les trois côtés de ce triangle et nous obtenons que la matrice  $M_{tt'}$  laisse invariant ses trois côtés, c'est-à-dire le triangle  $f_0$ . La connexion n'est donc pas forcément plate.

#### Cas général

Dans le cas général, la connexion est a priori quelconque sur toutes les faces du 4-simplex. La contrainte de recollement s'écrit toujours :

$${}^*E_f(t)M_{tt'}E_{f'}(t') = 0$$

soit, en exprimant les bi-vecteurs dans le tétraèdre  $t''$  qui contient les triangles  $f$  et  $f'$  et en utilisant la relation de transport entre deux tétraèdres  $E_f(t') = -M_{t't}E_f(t)$  :

$${}^*E_f(t'')M_{t''t}M_{tt'}M_{t't''}E_{f'}(t'') = 0 \quad (3.2)$$

**Démonstration (Annexe B) :**

Le transport d'un bi-vecteur entre deux tétraèdres s'écrit :  $E_f(t) = -M_{tt'}E_f(t')$  donc :

$$\epsilon^{IJ}_{KL}E_f^{KL}(t) = -\epsilon^{IJ}_{KL}(M_{tt'})^{KL}_{PQ}E_f^{PQ}(t') = -\epsilon^{PQ}_{KL}(M_{tt'})^{IJ}_{KL}E_f^{PQ}(t')$$

$$\text{Or } (M_{tt'})^{IJ}_{KL} = (M_{tt'}^{-1})^{KL}_{IJ} = (M_{t't})^{KL}_{IJ} \text{ donc } {}^*E_f(t) = -{}^*E_f(t')M_{t't}.$$

En utilisant la première et la dernière relation, nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

Dans ce tétraèdre  $t''$ , qui contient les triangles  $f$  et  $f'$ , la contrainte de simplicité s'écrit :

$${}^*E_f(t'')E_{f'}(t'') = 0 \quad (3.3)$$

À nouveau les deux relations (3.2) et (3.3) contraignent les matrices  $M_{tt'}$ . Supposons que les matrices  $M_{t_1t_2}$  laissent le triangle  $(t_1t_2)$  invariant (ce triangle correspond au triangle commun aux tétraèdres  $t_1$  et  $t_2$ ). Puisque les trois triangles  $(tt')$ ,  $(tt'')$  et  $(t't'')$  partagent le côté  $e$ , ce dernier est invariant sous l'action de  $M_{tt'}$ ,  $M_{t't''}$  et  $M_{t''t}$ . Nous nous retrouvons donc dans le cas précédent, où les contraintes de recollement se réduisent aux contraintes de simplicité.

Réciproquement, dans le cas non dégénéré, si nous supposons le recollement de tous les côtés (et les contraintes de simplicité et de Gauss qui assurent l'existence des tétraèdres), alors les triangles sont les mêmes, qu'ils soient considérés dans l'un ou l'autre des tétraèdres qui les contiennent. Les triangles  $(tt')$  sont donc invariants sous l'action de la matrice  $M_{tt'}$ .

Nous pouvons conclure qu'une condition nécessaire et suffisante pour assurer le recollement est que les matrices  $M_{tt'}$  laissent le triangle  $(tt')$  invariant.

**Interprétation**

Il reste maintenant à déterminer le nombre de degrés de liberté associés à  $M_{tt'}$ . Nous savons que  $M_{tt'} \in SO(4)$  et qu'elle laisse un triangle invariant. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que ce triangle appartient au plan (1-2) de  $\mathbb{R}^4$ . Alors, la seule rotation qui laisse ce triangle invariant est la rotation dans le plan (3-4). La matrice  $M_{tt'}$  dispose donc d'un unique degré de liberté.

Finalement, la géométrie est la suivante : les tétraèdres sont plats et collés les uns aux autres pour former un 4-simplex défini par ses dix longueurs, mais il reste un degré de liberté par face pour décrire la courbure. Ces degrés de liberté sont très probablement liés aux angles entre les normales des tétraèdres. Les triangulations considérées dans le modèle DR sont donc plus générales que celles du modèle EPR où les 4-simplexes sont plats.

**3.3 Les degrés de liberté du 4-simplex**

J'ai montré dans la section précédente que, contrairement au modèle EPR, les 4-simplexes ne sont pas forcément plats dans le modèle DR et que les triangulations considérées étaient plus générales. Je vais donc comparer le nombre de degrés de liberté associés à la triangulation 3d décrivant le bord d'un 4-simplex dans les deux modèles. Nous verrons que dans le modèle DR, le nombre de degrés de liberté est plus important que dans le modèle EPR mais qu'il reste néanmoins inférieur au cas de la gravité quantique à boucle où la triangulation est décrite par 30 paramètres. J'étudierai finalement le rôle important joué par les cas dégénérés.

### 3.3.1 Le 4-simplex dans le modèle EPR

À chaque face sont associés deux bi-vecteurs (un par tétraèdre contenant la face) : il y a dix faces et chaque bi-vecteur apporte six degrés de liberté, nous avons donc 120 degrés de liberté associés aux bi-vecteurs. Nous définissons ensuite une matrice  $M \in SO(4)$  sur chaque face séparant deux tétraèdres (il y a donc dix matrices, de six paramètres chacune, soit 120 degrés de liberté associés aux matrices  $M$ ). Nous comptons donc au total 240 degrés de liberté.

La planéité des tétraèdres nous permet de choisir une jauge dans laquelle les matrices  $M$  (qui définissent le transport parallèle entre tétraèdres) se réduisent à l'identité. Il ne reste donc plus que les 120 degrés de liberté associés aux bi-vecteurs.

Le transport parallèle entre deux tétraèdres lie les deux bi-vecteurs associés à une face par la relation  $E_f(t) = -M_{tt'} E_f(t')$ . Cela nous permet d'éliminer un bi-vecteur par face ce qui réduit le nombre de degrés de liberté à 60. Il y a ensuite six contraintes de Gauss par tétraèdre, mais une fois ces contraintes satisfaites dans quatre tétraèdres, elles le sont automatiquement dans le cinquième grâce au transport parallèle : il y a donc 24 contraintes de Gauss indépendantes, ce qui réduit le nombre de degrés de liberté à 36 (une contraintes de première classe, qui traduit une liberté de jauge, enlève deux degrés de liberté).

Il reste finalement dix (premières) contraintes de simplicité et dix (secondes) contraintes de simplicité (deux par tétraèdre, la troisième étant assurée par la contrainte de Gauss). Nous obtenons finalement 16 degrés de liberté pour cette triangulation.

Ces 16 degrés de liberté correspondent aux dix longueurs du 4-simplex (il est connu qu'un 4-simplex plat est déterminé par ses dix longueurs) et à une rotation globale de  $SO(4)$ .

### 3.3.2 Le 4-simplex dans le modèle DR

Dans ce modèle, les auteurs utilisent d'autres variables qui ont une signification géométrique plus simple et l'avantage d'être invariantes de jauge.

Dans un premier temps, en utilisant la décomposition self-dual de  $SO(4)$  (cf. Annexe B) les auteurs passent des variables  $(E, M)$  aux variables  $(E_+, E_-, M_+, M_-)$ . Ils définissent ensuite :

$$\begin{aligned} A_{ik\pm} &:= E_{ik\pm} \cdot E_{ik\pm} , \\ A_{ijk\pm} &:= E_{ij\pm} \cdot E_{ik\pm} , \\ \cos(\theta_{ijl\pm}) &:= \frac{N_{ijl\pm}^B M_{ij\pm}^{BC} N_{jl}^C}{\sqrt{N_{ijl\pm}^B \cdot N_{ijl\pm}^B N_{jil\pm}^B \cdot N_{jil\pm}^B}} . \end{aligned}$$

Les variables  $A_{ik\pm}$  correspondent aux aires des triangles calculées dans les secteurs self-dual ou anti self-dual. Les variables  $A_{ijk\pm}$  correspondent, à un facteur de normalisation près, aux angles diédraux 3d entre deux triangles. Finalement, nous pouvons montrer que les variables  $\theta_{ijl\pm}$  sont associées aux angles 4d entre les normales aux tétraèdres.

Les contraintes du modèle impliquent l'égalité entre les secteurs self-dual et anti self-dual :  $A_{ik+} = A_{ik-}$ ,  $A_{ijk+} = A_{ijk-}$  et  $\theta_{ijl+} = \theta_{ijl-}$ . Cependant, une fois ces contraintes imposées, les côtés ne sont pas forcément les mêmes lorsqu'ils sont considérés dans l'un ou l'autre des tétraèdres : nous avons seulement l'égalité des aires des triangles. Les auteurs ajoutent donc les contraintes  $\cos \alpha_{ijkl} = \cos \alpha_{jikl}$  où  $\alpha_{ijkl}$  est l'angle 2d, dans le tétraèdre  $i$  entre les deux côtés définis respectivement par les tétraèdres  $(i, j, l)$  et  $(i, j, k)$ .

Une fois toutes ces contraintes prises en compte, le 4-simplex est décrit par vingt degrés de liberté [9] soit deux fois plus que dans le modèle EPR (lorsque l'on a enlevé la liberté d'une rotation globale  $SO(4)$ ). Ces degrés de liberté correspondent aux angles diédraux entre les normales aux tétraèdres et sont donc associés à la courbure du 4-simplex.

### 3.3.3 Interprétation et importance des cas dégénérés

#### L'espace des phases en gravité quantique à boucle

Dans l'approche canonique de la gravité quantique à boucle, un réseau de spins est décrit par 15 nombres quantiques : un nombre quantique par lien, et un nombre quantique par vertex (section 1.2.1). Dans le cas d'un 4-simplex, nous avons donc un espace de configuration de dimension 15 et un espace de phase de dimension 30. Cet espace des phases est donc plus grand que ceux considérés plus haut.

Comme je l'ai signalé dans le chapitre précédent, nous nous sommes restreints à un sous-espace de Hilbert de la gravité quantique à boucle, composé des graphes 4-valents (le graphe est le graphe dual de la triangulation 3d, voir figure 2.1). Cependant, nous avons également émis une seconde hypothèse selon laquelle les tétraèdres se collent bien les uns aux autres (c'est-à-dire que la triangulation est géométrique). Or, cette dernière condition n'est pas toujours assurée en gravité quantique à boucle. En effet, d'après le chapitre 1, nous pouvons interpréter les nombres quantiques d'un réseau de spins comme les volumes des grains d'espace et les aires délimitant ces volumes. Dans le cas de vertex 4-valents, cela revient à définir les quatre aires associées aux faces du tétraèdre ainsi que son volume, or cela ne suffit pas à déterminer de manière unique les longueurs des côtés du tétraèdre. Ainsi, lors du recollement de deux tétraèdres voisins, seule l'égalité des aires est assurée mais pas la forme des triangles.

#### Le rôle des cas dégénérés

Pour calculer le nombre de degrés de liberté dans le modèle DR, nous avons dû faire l'hypothèse simplificatrice que les 4-simplexes sont non dégénérés (voir section 2.3.3). Je vais maintenant étudier l'influence de ces cas dégénérés sur la dimension de l'espace de phase dans un cas particulier.

Supposons que tous les bi-vecteurs sont normaux au vecteur  $n = (1, 0, 0, 0)$  et que les matrices  $M$  laissent invariant ce même vecteur  $n$ . Alors tous les bi-vecteurs  $E$  et  $ME$  de la triangulation associée au bord du 4-simplex sont normaux à  $n$  et génèrent un espace tridimensionnel. Les trois contraintes de simplicité sont alors trivialement vérifiées et il ne reste plus que les contraintes de Gauss : ce cas particulier correspond à une théorie BF du groupe  $SO(3)$  soumise aux seules contraintes de Gauss. Dans cette espace de phase, les conditions de recollement ne sont pas nécessairement vérifiées, seule l'égalité des aires des triangles (considérés dans l'un ou l'autre des tétraèdres) est assurée.

Calculons la dimension de l'espace de phase associé : nous avons trois paramètres par bi-vecteur et trois paramètres par matrice  $M$ , soit soixante degrés de liberté pour la théorie BF  $SO(3)$ , mais nous avons trois contraintes de Gauss par tétraèdre, soit quinze contraintes de Gauss pour le 4-simplex, ce qui réduit le nombre de degrés de liberté à trente.

Les cas dégénérés permettent donc de retrouver le même nombre de degrés de liberté qu'en gravité quantique à boucles.

# Conclusion

Le modèle EPR propose une amplitude pour la gravité quantique à boucle : il permet ainsi de calculer des amplitudes de transition entre les réseaux de spins et d'étudier la limite semi-classique. Pour construire ce modèle, nous avons commencé par discrétiser la théorie topologique BF, puis nous avons déterminé les contraintes à appliquer au niveau discret pour retrouver la théorie de la relativité générale. En se limitant à un certain type de triangulations, nous avons brisé les symétries de la relativité générale et réduit artificiellement le nombre de degrés de liberté : dès lors, la manière d'imposer les contraintes au niveau discret peut jouer un rôle important dans la quantification de la théorie. Une fois les contraintes obtenues, elles peuvent être élevées au rang d'opérateurs et appliquées sur les états quantiques pour trouver l'espace physique. Le résultat final correspond à la fonction de partition de la théorie BF où la somme est restreinte à certains nombres quantiques.

Le modèle DR propose une démarche alternative, dans laquelle les auteurs discrétisent une hypersurface 3d qui évolue dans le temps. Les contraintes imposées à la théorie BF sont différentes et ne correspondent pas à celles du modèle EPR. Le modèle n'est pas encore terminé, il reste en particulier à implémenter la dynamique.

La question était donc de savoir si les nouvelles contraintes du modèle DR devaient également être imposées dans les modèles EPR, et quelles étaient les conséquences de ces nouvelles contraintes sur la forme de la triangulation.

Dans ce rapport, j'ai montré que, déjà au niveau classique, ces deux modèles ne sont pas équivalents. Cependant, dans les deux cas, si nous nous restreignons aux 4-simplexes non dégénérés, la triangulation est géométrique et nous pouvons associer un vecteur à chaque segment de la triangulation. Cela prouve l'existence d'une tétrade et donc que les contraintes sont suffisantes pour décrire une discrétisation de la théorie de la relativité générale au niveau classique.

Dans le chapitre 3, j'ai commencé par montrer que la contrainte de recollement, ajoutée dans le modèle DR, n'est pas nécessaire dans le modèle EPR car le recollement est déjà assuré par la planéité des 4-simplexes. J'ai ensuite montré que les triangulations considérées dans le modèle DR sont plus générales puisqu'elles autorisent la présence de 4-simplexes courbes. De plus, cette courbure est décrite par un paramètre associé à chaque triangle et décrit l'unique rotation laissant ce triangle invariant. Pour étudier l'influence de cette courbure, j'ai également comparé le nombre de degrés de liberté de la triangulation associée au bord d'un 4-simplex : nous avons constaté qu'il était plus grand dans le modèle DR et que les cas dégénérés, non pris en compte dans le reste du rapport, jouent un rôle important puisqu'ils permettent de retrouver le même nombre de degrés de liberté que dans la formulation canonique de la LQG.

# Bibliographie

- [1] R Arnowitt, S Deser, and C W Misnerii. The dynamics of general relativity. *arXiv*, gr-qc, Feb 2008.
- [2] Abhay Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, D36 :1587–1602, 1987.
- [3] John C Baez. Spin foam models. *Class. Quantum Grav.*, 15 :1827, 1998.
- [4] John C Baez. An introduction to spin foam models of quantum gravity and bf theory. *Lecture Notes in Physics*,, 543/2000 :25–93, 2000.
- [5] John C Baez and John W Barrett. The quantum tetrahedron in 3 and 4 dimensions. *arXiv*, gr-qc, Mar 1999.
- [6] John W Barrett and Louis Crane. Relativistic spin networks and quantum gravity. *J. Math. Phys.*, 39 :3296, 1998.
- [7] Ryan James Dittrich Bianca. Simplicity in simplicial phase space. *arXiv*, gr-qc, Jun 2010.
- [8] Louis Crane, LH Kauffman, and David N Yetter. State-sum invariants of 4-manifolds, i. *arXiv*, hep-th, Jul 1997.
- [9] Bianca Dittrich and James P Ryan. Phase space descriptions for simplicial 4d geometries. *arXiv*, gr-qc, Jul 2008.
- [10] Jonathan Engle, Roberto Pereira, and Carlo Rovelli. Flipped spinfoam vertex and loop gravity. *Nuclear Physics B*, 798(1-2) :251–290, 2008.
- [11] L Freidel, K Krasnov, and R Puzio. Bf description of higher-dimensional gravity theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 3(hep-th/9901069. CGPG-99-1-1. 5) :1289–1324, 1999.
- [12] Alejandro Perez. Spin foam quantization of so(4) plebanski’s action. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5 :947–968, 2001.
- [13] Alejandro Perez. Spin foam models for quantum gravity. *Class. Quantum Grav.*, 20(6), 2003.
- [14] Rovelli. Quantum gravity. Oct 2009.
- [15] Carlo Rovelli. Ashtekar formulation of general relativity and loop-space non-perturbative quantum gravity : a report. *Class. Quantum Grav.*, 8 :1613–1675, Oct 1991.
- [16] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity. Jan 2002.
- [17] Holst Sören. Barbero’s hamiltonian derived from a generalized hilbert-palatini action. *Phys. Rev. D*, 53(10) :5966–5969, May 1996.

# Annexe A

## Formalisme canonique de la gravité quantique à boucle

L'action utilisée en gravité quantique à boucle (LQG) est l'action de Holst [17] :

$$S_{LQG}[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}[\omega] + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \wedge F^{IJ}[\omega]$$

où  $\gamma$  est un nouveau paramètre, appelé paramètre d'Immirzi. La LQG repose sur le programme de quantification canonique introduit par Dirac pour les systèmes contraints. Le Hamiltonien est obtenu à partir de l'action de Hölst : les variables canoniques  $(E_i^a, A_a^i)$  sont une triade et une connexion de  $SU(2)$ , appelée connexion de Ashtekar-Barbero. Ces variables canoniques vérifient les relations de commutation  $\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x-y)$ .

Le Hamiltonien s'écrit :  $H = \Lambda_i \nabla_a E^{ai} + N^a E^{bi} F_{abi} + NC$  où  $\Lambda_i$ ,  $N^a$  et  $N$  sont des multiplicateurs de Lagrange et où  $C$  est donné par :

$$C = \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b \left( F_{abk}(A) - \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) R_{abk}(\Gamma) \right)$$

où  $F$  est la courbure associée à  $A$ , et  $R$  la courbure associée à la connexion spatiale de Levi-Civita. Le Hamiltonien s'écrit donc comme la somme de trois contraintes de première classe (ce qui est typique des théories invariantes sous difféomorphismes) : la contrainte de jauge  $\nabla_a E^{ai}$  qui traduit l'invariance de jauge sous l'action du groupe  $SU(2)$ , la contrainte vectorielle  $E^{bi} F_{abi}$  qui traduit l'invariance sous difféomorphismes spatiaux et la contrainte Hamiltonienne  $C$  qui décrit la dynamique.

### L'espace cinématique de la LQG

#### Les fonctions cylindriques

Dans les théories de jauge, les boucles de Wilson (qui correspondent à la trace de l'holonomie de la connexion le long d'une boucle  $\gamma$ ) jouent un rôle important car elles sont invariantes de jauge :

$$W_\gamma(A) = \text{Tr}(U_\gamma(A)) = \text{Tr} \exp \int_\gamma A$$

Les fonctions cylindriques constituent une généralisation de ces boucles de Wilson à un graphe quelconque  $\Gamma$ . Ce dernier est constitué de liens  $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  qui se rejoignent au niveau



des  $N$  vertex. Les fonctions cylindriques  $\Psi$  sont alors données par un couple  $(\Gamma, f)$  où  $f : SU(2)^N \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonctionnelle de la connexion :

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(U_{\gamma_1}(A), \dots, U_{\gamma_N}(A)) .$$

À partir de la mesure de Haar sur le groupe  $SU(2)$ , il est possible de définir un produit scalaire entre ces fonctions cylindriques, et d'obtenir un espace de Hilbert. Pour obtenir une base de cet espace de Hilbert des fonctions cylindriques  $L^2$  sur  $SU(2)$ , nous utilisons le théorème de Peter-Weyl qui stipule qu'une base est donnée par les représentations irréductibles  $j$  de  $SU(2)$  :  $(\rho_j)_{\alpha\beta}^j(U) = \langle U | j, \alpha, \beta \rangle$ .

Ainsi, une base de l'espace de Hilbert est donnée par les états  $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l \rangle$  avec :

$$\langle A | \Gamma, j_l, \alpha_j, \beta_l \rangle = (\rho_{j_1})_{\alpha_1 \beta_1}^{j_1}(U_{\gamma_1}(A)) \dots (\rho_{j_N})_{\alpha_N \beta_N}^{j_N}(U_{\gamma_N}(A)) \quad (\text{A.1})$$

### Les réseaux de spins

Nous voulons maintenant construire des états qui sont invariants sous l'action des deux groupes de jauge de la théorie ( $SU(2)$  et l'invariance sous les difféomorphismes spatiaux).

Sous une transformation locale  $g$  de  $SU(2)$ , l'holonomie se transforme selon :  $U_{\gamma} \rightarrow U'_{\gamma} = g(x_f^{\gamma}) U_{\gamma} g^{-1}(x_i^{\gamma})$ , et les fonctions cylindriques selon :

$$f[U_{\gamma_1}(A), \dots, U_{\gamma_N}(A)] \rightarrow f[ g(x_f^{\gamma_1}) U_{\gamma_1}(A) g^{-1}(x_i^{\gamma_1}), \dots, g(x_f^{\gamma_N}) U_{\gamma_N}(A) g^{-1}(x_i^{\gamma_N}) ] ,$$

pour les éléments de la base (A.1), nous avons en particulier :

$$\rho_{j_1}(U_{\gamma_1}) \rightarrow \rho_{j_1}(g(x_f^{\gamma_1})) \times \rho_{j_1}(U_{\gamma_1}) \times \rho_{j_1}(g^{-1}(x_i^{\gamma_1}))$$

Ainsi, la transformation de jauge agit uniquement au niveau des vertex. Pour assurer l'invariance sous l'action de  $SU(2)$  nous introduisons donc, au niveau de chaque vertex, un tenseur  $v : \Pi_{\gamma_{in}} V^{j_{\gamma}} \rightarrow \Pi_{\gamma_{out}} V^{j_{\gamma}}$  invariant sous l'action de  $SU(2)$ . Les exposants  $\gamma_{in}$  (resp.  $\gamma_{out}$ ) correspondent aux liens entrants (resp. sortants) du vertex et  $V^j$  représente la représentation  $j$  de  $su(2)$ . Ces tenseurs sont appelés entrelaceurs, les éléments de la base seront notés  $v_i$ . Leur rôle est de contracter les différentes représentations entre elles pour rendre l'état invariant de jauge. Nous obtenons ainsi les réseaux de spins :

$$|S \rangle = \sum_{\alpha_l, \beta_l} v_{i_1}^{\beta_1 \dots \beta_{n_1} \alpha_1 \dots \alpha_{n_1}} \dots v_{i_N}^{\beta_{n_{N-1}+1} \dots \beta_{n_N} \alpha_{n_{N-1}+1} \dots \alpha_{n_N}} | \Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l \rangle$$

Finalemnt, le graphe  $\Gamma$  peut être vu comme un graphe abstrait : deux graphes, qui ne diffèrent que par une transformation continue, sont alors identiques et représentent le même état. Cela traduit l'invariance par difféomorphismes spatiaux.

### Résultats généraux de la LQG

Il est possible de définir des opérateurs géométriques d'aire et de volume qui ont une interprétation très simple en terme de réseaux de spins. Les entrelaceurs sont associés aux éléments de volume et peuvent être interprétés comme des « grains d'espace », les liens entre ces vertex sont eux associés aux éléments d'aires qui séparent les éléments de volumes. En particulier, le spectre de l'opérateur d'aire, associé à un lien, est discret. Il est donné par :

$$A_j = 8\pi\gamma\hbar Gc^{-3} \sqrt{j(j+1)}$$

où  $\gamma$  est le paramètre d'Immirzi,  $j$  la représentation de  $su(2)$  associée au lien. Le premier résultat important de la gravité quantique à boucle est la quantification des aires et des volumes.

# Annexe B

## Propriétés du groupe $SO(4)$

Le groupe de Lie  $SO(4)$  est le groupe des rotations en dimension 4, il correspond au groupe des matrices orthogonales de déterminant unité. Son algèbre de Lie  $so(4)$  est l'algèbre des matrices antisymétriques  $4 \times 4$ , elle possède 6 paramètres.

Le groupe  $SO(4)$  est localement isomorphe au produit  $SU(2) \times SU(2)$ , plus précisément :  $SO(4) \sim (SU(2)_+ \times SU(2)_-)/\mathbb{Z}_2$  :

$$\forall G \in SO(4), \exists (g_+, g_-) \in SU(2)_+ \times SU(2)_- \text{ tel que } G = (g_+, g_-) \text{ et } GG' = (g_+g'_+, g_-g'_-).$$

Au niveau des algèbres de Lie,  $so(4)$  est la somme de deux algèbres  $su(2)$  qui commutent entre elles :  $so(4) \approx su(2)_+ \oplus su(2)_-$ .

Soit  $J^{IJ}$  les générateurs de l'algèbre de Lie  $so(4)$ , nous définissons  $J_{\pm} = *J \pm J$  où l'opérateur de Hodge est défini par la relation ( $*B^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}B^{KL}$ ). Alors  $J_+$  et  $J_-$  génèrent respectivement des sous-algèbres  $su(2)_+$  et  $su(2)_-$  toutes deux isomorphes à  $su(2)$  et  $[J_+, J_-] = 0$ .

En effet, choisissons une base particulière : on choisit un vecteur unitaire  $n$  de  $\mathbb{R}^4$  et trois vecteurs  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  formant une base orthonormée avec  $n$ . Nous posons alors :

$$J_{\pm}^i = \frac{1}{2}(*J \pm J)_{IJ}v_i^I n^J$$

et ces générateurs ont les mêmes constantes de structure que l'algèbre de Lie  $su(2)$  :

$$[J_{\pm}^i, J_{\pm}^j] = \epsilon^i{}_{jk} J_{\pm}^k$$

Pour tout bi-vecteur  $B^{IJ} \in so(4)$ , nous avons les relations :

$$B \cdot B = B_+^i B_+^i + B_-^i B_-^i$$

$$*B \cdot B = B_+^i B_+^i - B_-^i B_-^i$$

### Propriétés générales

$$\forall M \in SO(4) \quad : \quad \epsilon^{IJ}{}_{KL} M^{KL}{}_{MN} = \epsilon^{MN}{}_{KL} M^{IJ}{}_{KL} ,$$

$$(M^{-1})^{IJKL} = M^{KLIJ} .$$