

Charly Nayet

2^{ème} année du Master Sciences de la Matière

Ecole Nationale Supérieure de Lyon

Université Claude Bernard Lyon1

avril-juillet 2008

SOLUTIONS EXACTES POUR DES
MODÈLES D'UNIVERS À SYMÉTRIE
SPHÉRIQUE EN COSMOLOGIE
NON-HOMOGENÈNE

Responsable du stage : **Thomas Buchert**

Université Claude Bernard Lyon1

Centre de Recherche Astrophysique de Lyon

Résumé

Pour pallier à certaines lacunes du modèle standard cosmologique, et notamment pour fournir une alternative aux mystérieuses énergie noire et matière sombre, une nouvelle stratégie a été développée, depuis quelques années, afin de tenir compte de l'effet des structures présentes dans l'univers. Pour cela, l'étude des équations d'Einstein locales, restreintes par de fortes symétries dans le modèle standard cosmologique, sera remplacée par le formalisme des équations d'Einstein moyennées qui incluent les inhomogénéités. La forte non-linéarité des équations de la relativité générale fait alors apparaître lors de la prise de la valeur moyenne un terme supplémentaire, la *rétro-action*. Ce rapport a pour ambition de trouver des résultats généraux sur ce terme, indépendamment de conditions initiales particulières. Nous montrerons alors que ce terme s'annule dans des domaines à symétrie sphérique en cosmologie newtonienne et relativiste dans des univers de courbure nulle. Nous retrouverons ainsi des théorèmes connus de ce nouveau formalisme, mais nous proposerons également des généralisations et de nouvelles stratégies.

Abstract

In order to address certain shortcomings of the standard cosmological model, and in particular to furnish an alternative to the postulated mysterious dark energy and dark matter components, a new strategy has been developed, since some years, to take into account the influence of structures in the Universe. For this purpose, the study of the local Einstein equations, restricted by strong symmetries in the standard model of cosmology, will be replaced by a framework of averaged Einstein equations that include inhomogeneities. The strong non-linearity of the equations of general relativity causes appearance of an additional term, the *backreaction*. We aim, in this report, to find general results on the value of this term, independent of special initial conditions. In particular, we show that this term vanishes in spherically symmetric domains in both Newtonian and zero-curvature relativistic cosmology. We so recover known theorems in this new framework, but also propose generalizations and new strategies.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Dérivation des équations moyennées	5
2.1	Cosmologie newtonienne	5
2.1.1	Les équations locales	5
2.1.2	Introduction des équations moyennées	7
2.2	Cosmologie relativiste	8
2.2.1	Équations d'évolution	8
2.2.2	Équations moyennées	9
3	Le modèle LTB	10
3.1	Calcul de paramètres géométriques dans un modèle LTB	11
3.2	La rétro-action dans un univers LTB	12
3.3	La condition d'intégrabilité dans un univers LTB	13
4	Domaines à symétrie sphérique et recherche de classe de solutions	13
4.1	Le théorème des sphères en fer de Newton	14
4.2	Le théorème d'un univers toroïdal	14
4.3	Univers LTB plat et quantités extrinsèques	15
4.4	Univers LTB plat et quantités intrinsèques	16
5	Conclusion et perspectives	19
A	Approche 3+1 de la relativité générale	20
B	Construction de la métrique LTB	22
C	Les invariants cinématiques dans un domaine à symétrie sphérique	24

1 Introduction

Il y a quasiment un siècle maintenant, un modèle dit *modèle standard* a été élaboré et est depuis largement admis et utilisé par la communauté pour décrire les mécanismes qui régissent la dynamique de notre univers. Ce modèle repose sur le *principe cosmologique fort* qui peut être énoncé comme suit : *localement, l'Univers est en tout point homogène* (il n'y a pas de position privilégiée) *et isotrope* (il n'y a pas de direction privilégiée). Par ailleurs, la matière et la géométrie sont perçues comme des champs gouvernés par la relativité générale. La métrique décrivant un tel espace homogène et isotrope est la fameuse métrique de Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker (FLRW).

Ce modèle est malheureusement mis en défaut sur des échelles réduites : l'Univers est structuré par des étoiles, qui se regroupent dans des galaxies, qui forment des amas de galaxies, qui forment elles-mêmes des amas d'amas (ou superamas) de galaxies. A l'aide d'outils statistiques qui évaluent les fonctions de corrélation à différents ordres, on montre que l'Univers n'est plus homogène sur des échelles inférieures à 300 Mpc (la plus grosse structure actuellement détectée est la *Sloan Great Wall* et mesure environ 420 Mpc [1]). Ceci nous amène à définir le *principe cosmologique faible* : *globalement, l'Univers est homogène et isotrope*. Muni de ce principe cosmologique faible, l'Univers peut se décomposer en deux ensembles : l'ensemble A qui correspond à des échelles inférieures à 300 Mpc et où l'Univers est structuré et l'ensemble B qui s'étend sur des échelles supérieures et où les champs sont supposés homogènes et isotropes. Depuis un siècle, l'amélioration des techniques d'observation a permis de mieux connaître notre Univers sur des distances cosmologiques. Nous retiendrons trois de ces outils :

- L'observation de courbes de rotations de galaxies a permis de comparer les masses lumineuses (donc baryoniques) aux masses gravitationnelles obtenues par application de la troisième loi de Kepler. On s'aperçut que de la matière non-baryonique était présente au sein des galaxies et dans une plus grande mesure dans les amas et superamas de galaxies. Cette matière fut par la suite nommée *matière sombre* du fait qu'elle n'est pas rayonnante.
- L'observation des supernovae (SNe) de type Ia qui en temps que chandelles standards ont permis d'établir des relations entre la vitesse (à travers la mesure du redshift) et la distance (à travers la luminosité des SNe), relations qui ont fourni la preuve de l'accélération de l'expansion de l'univers observable. Cette accélération est rendue possible par la présence d'un fluide de pression négative, baptisé *énergie noire*, et qui intervient soit en temps que *constante cosmologique* notée en général Λ , soit en temps que champ scalaire, c'est le modèle de *quintessence*.
- L'observation du *fond diffus cosmologique* ou *fond cosmique micro-onde* (CMB) en tant que photographie de notre univers au moment de la recombinaison a permis de mesurer des inhomogénéités l'ordre de $\delta T/\bar{T} \sim 10^{-5}$ ce qui a pu contraindre les densités d'énergie noire et de matière sombre.

L'univers serait ainsi constitué de deux éléments dont on ignore toujours l'origine et qui sont de surcroit ses constituants majoritaires : les différentes campagnes d'observations [2], [3] convergent vers des valeurs de densité $\Omega_\Lambda \sim 0,75$ et $\Omega_{CDM} \sim 0,25$. Alors que les théoriciens butent toujours sur l'explication de ces deux composantes (voir par exemple la référence [4]), une voie originale et prometteuse est en train de se développer, il s'agit de l'étude des équations d'Einstein moyennées, imaginée dans les années 80 par Georges F.R. Ellis, puis reprise et formalisée dans les années 90 [5], [6], [7], [8], [9].

Les équations d'Einstein obtenues dans le formalisme de la relativité générale conduisent dans

le cas d'un univers homogène aux lois d'accélération et d'expansion de Friedmann. Dans un univers inhomogène, comme c'est le cas dans l'ensemble A et dans une moindre mesure dans l'ensemble B, il devient nécessaire de travailler avec des valeurs moyennées dans l'espace. Or, les équations d'Einstein étant très fortement non-linéaires, les équations moyennées qui en sont issues s'avèrent être différentes des équations de Friedmann. La prise de la valeur moyenne conduit à l'apparition d'un nouveau terme $Q_{\mathcal{D}}$, appelé *rétro-action* dont il sera question dans la suite de ce travail ; ce terme peut, selon son signe, jouer le rôle de l'énergie noire ou de la matière sombre. Ainsi, l'expansion apparente de l'univers et la matière a priori manquante pourraient être expliquées par des considérations purement géométriques (à condition que ce terme de rétro-action soit suffisamment important).

La première partie de ce travail sera donc dédiée à l'introduction du formalisme nécessaire pour obtenir des équations moyennées tant dans un cadre newtonien que relativiste. La deuxième partie traitera l'étude des équations d'Einstein dans le cas particulier d'un univers inhomogène en couche, le fameux modèle de *Lemaître-Tolman-Bondi* (LTB). Enfin nous chercherons des classes de solutions exactes dans des univers à symétrie sphérique dans lesquels, malgré les inhomogénéités, ce terme de rétro-action s'annule. On aboutira alors à des théorèmes connus, mais également à des généralisations obtenues lors de ce stage, avec à l'esprit une meilleure compréhension des effets de la rétro-action.

2 Dérivation des équations moyennées

On va tout d'abord, dans cette première partie, construire les différentes équations nécessaires à la description de notre problème. Pour plus de précision, on pourra lire les chapitres 1 et 4 des notes du cours "Introduction aux théories de la gravitation" donné par T. Buchert à l'ENSL en M1 Sciences de la matière.

2.1 Cosmologie newtonienne

2.1.1 Les équations locales

On se place dans un premier temps dans un cadre newtonien et on considère un élément fluide de densité de masse $\rho(x^i, t)$, où x^i sont les coordonnées eulériennes et t est le temps. On supposera que ce fluide est en chute libre par rapport à un système de référence avec une vitesse $\vec{v}(x^i, t)$: cet élément de fluide ne subit que l'accélération de la gravitation \vec{g} , on néglige donc toute autre force pouvant s'exercer sur lui et notamment toute force de pression ou toute force inertielle ; on fait ici l'hypothèse que ce fluide est un fluide de poussière. On supposera de plus la conservation au cours du temps de la masse contenue dans un domaine de l'espace, simplement connexe et dépendant du temps \mathcal{D}_t , et définie par :

$$M \equiv \int_{\mathcal{D}_t} \rho(x^i, t) d^3x . \quad (1)$$

Un tel système est régi par les équations de Euler-Newton :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g} ; \quad (2)$$

$$\dot{\rho} = -\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) ; \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0} ; \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \Lambda - 4\pi G\rho , \quad (5)$$

où Λ est la constante cosmologique et où $\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$ sera notre notation pour la dérivée totale (lagrangienne) par rapport au temps : $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$

On introduit une décomposition cinématique de la vitesse, en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}\{v_{i,j} + v_{j,i}\} + \frac{1}{2}\{v_{i,j} - v_{j,i}\} \equiv \theta_{ij} + \omega_{ij} , \quad (6)$$

$$\equiv \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} + \sigma_{ij} + \omega_{ij} , \quad (7)$$

où θ_{ij} un tenseur symétrique, appelé tenseur d'expansion, σ_{ij} est la partie tensorielle symétrique à trace nulle, appelée tenseur de cisaillement et ω_{ij} est un tenseur antisymétrique, appelé tenseur de vorticité. On peut alors définir les taux d'expansion θ , de cisaillement σ et de vorticité ω par ¹ :

$$\theta \equiv \theta_{ii} ; \quad (8)$$

$$\sigma \equiv \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{ik} ; \quad (9)$$

$$\omega \equiv \frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{ik} . \quad (10)$$

En introduisant cette décomposition cinématique de la vitesse dans le système d'Euler-Newton, on aboutit aux équations suivantes :

$$\dot{\rho} = -\rho\theta ; \quad (11)$$

$$\dot{\theta} = \Lambda - 4\pi G\rho - \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\omega^2 - \sigma^2) ; \quad (12)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ij} + (\sigma\omega)_{ij} . \quad (13)$$

On définit maintenant les trois invariants scalaires du gradient de vitesse (invariants sous une rotation) :

$$\text{I}(v_{i,j}) \equiv v_{i,i} ; \quad (14)$$

$$\text{II}(v_{i,j}) \equiv \frac{1}{2}\{v_{i,i}v_{j,j} - v_{i,j}v_{j,i}\} ; \quad (15)$$

$$\text{III}(v_{i,j}) \equiv \det(v_{i,j}) . \quad (16)$$

Ces trois invariants peuvent alors être exprimés en fonction des invariants cinétiques sous la forme :

$$\text{I} = \theta ; \quad (17)$$

$$\text{II} = \frac{1}{3}\theta^2 + \omega^2 - \sigma^2 ; \quad (18)$$

$$\text{III} = \frac{1}{9}\theta^3 + 2\theta(\sigma^2 + \frac{1}{3}\omega^2) + \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \sigma_{ij}\omega_i\omega_j . \quad (19)$$

¹On utilisera dans l'ensemble de ce rapport la convention d'Einstein qui sous-entend la sommation sur des indices répétés.

On peut alors finalement réécrire les équations (11) et (12) en terme d'invariants scalaires :

$$\dot{\rho} = -\rho\mathbb{I} ; \quad (20)$$

$$\dot{\theta} = \Lambda - 4\pi G\rho - \mathbb{I}^2 + 2\mathbb{II} , \quad (21)$$

qui sont respectivement l'équation de continuité locale, qui décrit l'évolution de la densité de masse, et l'équation de Raychaudhury locale, qui décrit l'évolution du taux d'expansion.

2.1.2 Introduction des équations moyennées

Soit $f_t : X \mapsto x$, l'application qui relie la position \vec{X} des particules du fluide à l'instant t_0 à la position \vec{x} au temps t : $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$. Les éléments de volume aux temps t et t_0 sont liés par :

$$d^3x = J d^3X , \quad (22)$$

où par définition, J est le jacobien du changement de variables entre coordonnées eulériennes et coordonnées lagrangiennes : $J \equiv \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_k} \right|$. Un calcul direct montre que J vérifie la relation : $\dot{J} = J\theta$.

On utilise maintenant la définition du volume co-mouvant $V_{\mathcal{D}}(t) \equiv \int_{\mathcal{D}_t} d^3x$ pour définir la moyenne spatiale d'un champs tensoriel $\mathcal{A}(t, \vec{x})$:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{D}_t} \equiv \frac{1}{V_{\mathcal{D}}(t)} \int_{\mathcal{D}_t} \mathcal{A} d^3x . \quad (23)$$

On donne, de plus, l'expression de la valeur moyenne du taux d'expansion en fonction du co-volume puis du facteur d'échelle qu'on définit par $a_{\mathcal{D}}(t) \equiv \left(\frac{V_{\mathcal{D}}(t)}{V_0} \right)^{1/3}$:

$$\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}(t)}{V_{\mathcal{D}}(t)} = 3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}(t)}{a_{\mathcal{D}}(t)} . \quad (24)$$

On peut alors calculer la règle de commutation entre évolution temporelle et prise de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{D}_t} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{V_{\mathcal{D}}(t)} \int_{\mathcal{D}_t} \mathcal{A} d^3x \right\} \\ &= -\frac{1}{V_{\mathcal{D}}(t)} \frac{dV_{\mathcal{D}}(t)}{dt} \frac{1}{V_{\mathcal{D}}(t)} \int_{\mathcal{D}_t} \mathcal{A} d^3x + \frac{1}{V_{\mathcal{D}}(t)} \int_{\mathcal{D}_{t_0}} \frac{d}{dt} \left\{ J(t, \vec{X}) \mathcal{A} \right\} d^3X . \end{aligned}$$

On obtient finalement la règle de non-commutation qui est au cœur de ce formalisme :

$$\langle \dot{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{D}_t} - \dot{\langle \mathcal{A} \rangle}_{\mathcal{D}_t} = \langle \mathcal{A}\theta \rangle_{\mathcal{D}_t} - \langle \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{D}_t} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}_t} , \quad (25)$$

et en appliquant cette règle au taux d'expansion θ , on obtient le résultat :

$$\langle \dot{\theta} \rangle_{\mathcal{D}_t} + \langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}_t} = \langle \dot{\theta} \rangle_{\mathcal{D}_t} + \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}_t}^2 . \quad (26)$$

En prenant la valeur moyenne des équations (20) et (21) et en utilisant ces règles de commutation, on aboutit aux équations :

$$\langle \dot{\rho} \rangle_{\mathcal{D}_t} = -\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_t} \langle \mathbb{I} \rangle_{\mathcal{D}_t} , \quad (27)$$

qui est l'équation de continuité moyennée, et

$$\langle \dot{\theta} \rangle_{\mathcal{D}_t} = \Lambda - 4\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_t} - \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}_t}^2 + 2 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}_t} , \quad (28)$$

qui est l'équation de Raychaudhuri moyennée. On peut remarquer que les équations d'évolution locale de la densité de matière ρ et du tenseur d'expansion θ ont la même forme que les équations d'évolution de leur valeur moyennée. Ceci peut se comprendre par le fait que les domaines sur lesquels sont faits les moyennes sont, par hypothèse, simplement connexes et peuvent par continuité être restreints à des points; les équations locales ne sont qu'un cas particulier des équations régionales. On introduit par la suite le terme de rétro-action définit par :

$$Q_{\mathcal{D}}(t) \equiv \frac{2}{3} \left\{ \left\langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}_t})^2 \right\rangle_{\mathcal{D}_t} \right\} + 2 \langle \omega^2 - \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}_t} = 2 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}_t} - \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}_t}^2 . \quad (29)$$

On peut alors écrire l'équation de Raychaudhuri sous la forme :

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} - \Lambda + 4\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_t} = Q_{\mathcal{D}} . \quad (30)$$

Cette équation est celle que l'on obtiendrait dans un univers homogène (équation de Friedmann), à laquelle est ajouté un terme supplémentaire, le terme de rétro-action; arrêtons-nous un instant sur ce terme. Selon son signe, il pourra, s'il est positif, jouer le rôle de l'énergie noire et être responsable de l'accélération de l'expansion, mais s'il est négatif, il adoptera le comportement de la matière et freinera l'expansion. Ce terme peut donc, potentiellement, décrire à la fois l'énergie noire et la matière sombre.

2.2 Cosmologie relativiste

On se place maintenant dans un cadre relativiste et en ayant à l'esprit une recherche de correspondance avec le cadre newtonien, on va s'intéresser aux équations d'évolution de la densité de matière et du taux d'expansion, défini par : $\theta \equiv \theta^i_i = g^{ij} \theta_{ij}$, où le tenseur d'expansion θ_{ij} et le tenseur métrique g_{ij} sont introduits en annexe A.

2.2.1 Équations d'évolution

On considère comme dans le cas newtonien, un élément de fluide de poussière de densité de masse $\rho(t, \vec{X})$ contenu dans un domaine \mathcal{D} de volume $V_{\mathcal{D}}(t)$. On supposera que la masse contenue dans ce volume $M_{\mathcal{D}}(t)$ reste constante au cours du temps : $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$. On peut de plus définir la 3-forme de volume $d\mu_g \equiv J d^3 X$ où par définition $J \equiv \det(\eta)$ (la matrice η^a_i est introduite en annexe A); on pourra noter au passage la propriété importante donnant la loi d'évolution du jacobien : $\dot{J} = \theta J$. En partant de l'hypothèse de la conservation de la masse, on aboutit à l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow \int_{\mathcal{D}_{t_0}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho(t, \vec{X}) J \right\} d^3 X = 0 \quad \forall \mathcal{D}_{t_0} \\ &\Leftrightarrow \dot{\rho} - \rho K = 0 , \end{aligned}$$

où on a introduit la courbure extrinsèque $K \equiv g^{ij} K_{ij} = -\theta$.

Pour obtenir l'équation d'évolution du tenseur de courbure, il nous faut utiliser les équations de champs d'Einstein : $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, où on a introduit le tenseur

de Ricci $R_{\mu\nu}$, la courbure scalaire ou courbure intrinsèque $\mathcal{R} \equiv R^\mu{}_\mu$ et le tenseur d'énergie-impulsion, qui dans le cas d'un fluide de poussière, s'exprime simplement par $T_{\mu\nu}^{dust} = \rho u_\mu u_\nu$, avec $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ la 4-vitesse du fluide, et qui se réduit avec notre choix de feuilletage au quadrivecteur $(1, 0, 0, 0)$. La composante $(0, 0)$ des équations d'Einstein s'écrit alors :

$$R_{00} = 4\pi G\rho - \Lambda . \quad (31)$$

On peut relier les composantes du tenseur de Ricci à celles du tenseur de courbure extrinsèque K_{ij} grâce aux équations de Gauss-Codazzi ^{2,3,4} :

$${}^4R_{00} = \dot{K} - K^{ij}K_{ij} \quad ; \quad {}^4R_{i0} = K_{|i} - K_{i||k}^k \quad ; \quad {}^4R_{ij} = {}^3R_{ij} - \dot{K}_{ij} - 2K_{ik}K_j^k + KK_{ij} , \quad (32)$$

pour finalement obtenir l'équation de Raychaudhuri donnant l'évolution de la courbure extrinsèque :

$$-\dot{K} + K^{ij}K_{ij} = \Lambda - 4\pi G\rho . \quad (33)$$

On peut également exprimer la courbure scalaire à 4 dimensions en fonction de celle à trois dimensions en utilisant les équations (32) :

$${}^4\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \quad (34)$$

$$= -2\dot{K} + K^{ij}K_{ij} + K^2 + {}^3\mathcal{R} . \quad (35)$$

La trace des équations d'Einstein donne l'expression de la courbure scalaire en fonction de ρ et Λ : ${}^4\mathcal{R} = 8\pi G\rho + 4\Lambda$; en combinant cette relation avec les équations (33) et (35), on obtient l'équation de contrainte de Hamilton :

$${}^3\mathcal{R} + K^2 - K^i{}_j K^j{}_i = 16\pi G\rho + 2\Lambda \quad (36)$$

2.2.2 Équations moyennées

On introduit ici la définition de la valeur moyenne d'une fonction $\psi(X^i, t)$:

$$\langle \psi(X^i, t) \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}(t)} \int_{\mathcal{D}_t} \psi(X^i, t) \sqrt{\det(g)} d^3X . \quad (37)$$

On peut ici souligner que contrairement au cas newtonien, cette définition de la moyenne ne peut s'appliquer que pour des fonctions scalaires et en aucun cas pour des fonctions tensorielles, sachant que l'intégrale d'un tenseur n'est pas forcément un tenseur. C'est entre autre pour cette raison que les équations que nous aurons à manipuler ne feront intervenir que des quantités scalaires.

En utilisant cette définition, on obtient la règle de non-commutation entre évolution temporelle et prise de la valeur moyenne (Éq. 38) qu'on applique ensuite au tenseur d'expansion, pour obtenir les équations de continuité (Éq. 39), de Raychaudhuri (Éq. 40) et de contrainte de Hamilton (Éq. 41) moyennées :

$$\langle \dot{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{D}_t} - \left\langle \dot{\mathcal{A}} \right\rangle_{\mathcal{D}_t} = \langle \mathcal{A}\theta \rangle_{\mathcal{D}_t} - \langle \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{D}_t} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}_t} ; \quad (38)$$

²Pour plus de détails sur ces relations on pourra en trouver une démonstration dans [10].

³Les indices '3' et '4' se réfèrent à la dimension de l'espace dans lequel ces objets sont définis.

⁴Une barre verticale signifie une dérivation partielle par rapport aux coordonnées lagrangiennes X^i , une double barre verticale une dérivation covariante par rapport à la métrique g_{ij} .

$$\langle \dot{\rho} \rangle_{\mathcal{D}_t} = -\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_t} \langle \dot{\theta} \rangle_{\mathcal{D}_t} ; \quad (39)$$

$$\langle \dot{\theta} \rangle_{\mathcal{D}_t} + \frac{1}{3} \langle \dot{\theta} \rangle_{\mathcal{D}_t}^2 = \Lambda - 4\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}_t} + Q_{\mathcal{D}} ; \quad (40)$$

$$\langle {}^3\mathcal{R} \rangle + \frac{2}{3} \langle \dot{\theta} \rangle^2 - 16\pi G \langle \rho \rangle - 2\Lambda = -Q_{\mathcal{D}} , \quad (41)$$

où on a introduit le terme de rétro-action :

$$Q_{\mathcal{D}} = \frac{2}{3} \left\langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}_t})^2 \right\rangle_{\mathcal{D}_t} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}_t} = 2 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}_t} - \frac{2}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}_t}^2 . \quad (42)$$

Les invariants scalaires étant définis par :

$$\text{I} \equiv \theta ; \quad (43)$$

$$\text{II} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \theta^i_i \theta^j_j - \theta^i_j \theta^j_i \right\} . \quad (44)$$

En combinant la dérivée temporelle de l'équation de contrainte de Hamilton moyennée et l'équation de Raychaudhuri moyennée on obtient la *condition d'intégrabilité* qui montre le couplage entre la rétro-action et la courbure scalaire moyennée :

$$(Q_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^6)^{\cdot} + a_{\mathcal{D}}^4 (\langle {}^3\mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^2)^{\cdot} = 0 , \quad (45)$$

où le facteur d'échelle effectif vérifie la relation $\mathfrak{Z}_{a_{\mathcal{D}}}^{\dot{a}_{\mathcal{D}}} = \langle \dot{\theta} \rangle$.

On obtient ainsi un système de trois équations (Éq. 39, Éq. 40, Éq. 41) à quatre inconnues $\langle \dot{\theta} \rangle$, $\langle \sigma^2 \rangle$, $\langle \rho \rangle$ et $\langle {}^3\mathcal{R} \rangle$, qui est donc non fermé. Il existe plusieurs moyens pour le fermer, on peut par exemple imposer une équation d'état dynamique reliant $Q_{\mathcal{D}}$ et $\langle {}^3\mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$. Un autre moyen est d'imposer la métrique ; on va dans ce travail s'intéresser à ce deuxième axe en se focalisant sur une métrique inhomogène mais à symétrie sphérique, c'est le modèle de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB).

3 Le modèle LTB

Ce modèle, imaginé dès 1933 par Lemaître puis repris par Tolman en 1934 et Bondi en 1947 [11], décrit un univers inhomogène en couches et permet d'étudier les effets des structures sphériques dans l'univers. Ce modèle-jouet est en particulier utilisé pour comprendre l'accélération apparente de l'Univers [12], [13], [14].

Dans un tel univers, les éléments du tenseur métrique dépendent non seulement du temps t , comme dans le cas d'un univers homogène, mais également de la coordonnée radiale r . Dans un tel espace, la métrique prend la forme suivante (voir annexe B) :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'^2(t, r)}{1 + 2E(r)} dr^2 + R^2(t, r) \{ d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \} . \quad (46)$$

Cette métrique LTB va nous permettre de calculer un certain nombre de quantités géométriques qui vont nous intéresser par la suite.

3.1 Calcul de paramètres géométriques dans un modèle LTB

Commençons par réécrire les équations d'Einstein obtenues dans un tel univers. Après quelques lignes de calcul, les équations (121), (122) et (123) peuvent être réécrites sous la forme :

$$4\pi\rho(r) = \frac{M'(r)}{R'(t,r)R^2(t,r)} ; \quad \frac{1}{2}\dot{R}^2(t,r) - \frac{GM(r)}{R(t,r)} = E(r) , \quad (47)$$

où M et E sont des fonctions arbitraires de r . Afin d'interpréter ces fonctions, on peut calculer la masse contenue dans le co-volume $V_{\mathcal{D}}$, définie par :

$$M_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} \rho(r) d\mu_g = \int_{\mathcal{D}} \rho(r) J d^3 X , \quad (48)$$

où le jacobien vaut $J \equiv \sqrt{\det g_{ij}} = \frac{R'(t,r)R^2(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}} \sin\theta$. On obtient finalement en utilisant la première relation de l'équation (47) : $M_{\mathcal{D}} = \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{M'(r)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr$.

On peut également réexprimer la courbure scalaire à quatre dimensions ${}^4\mathcal{R}$ en fonction de celle à trois dimensions ${}^3\mathcal{R}$ en utilisant l'équation (120) :

$${}^4\mathcal{R} = 2 \left\{ \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + 2 \frac{\ddot{R}}{R} \right\} + 2 \left\{ \frac{\ddot{R}'}{R'} + 2 \frac{\dot{R}\dot{R}'}{RR'} \right\} + \left\{ -\frac{4}{R^2} \left(E + \frac{E'R}{R'} \right) \right\} \quad (49)$$

$$= {}^3\mathcal{R} + 2 \left\{ \frac{1}{\dot{R}R^2} \partial_t (R\dot{R}^2) + \frac{1}{RR'} \partial_t (R\dot{R}') \right\} , \quad (50)$$

où la courbure scalaire à trois dimensions vaut :

$${}^{(3)}\mathcal{R} = -4 \frac{\partial_r(ER)}{R'R^2} , \quad (51)$$

et dont la valeur moyenne est :

$$\langle {}^3\mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}_t} = -\frac{16\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r(ER)}{\sqrt{1+2E}} dr . \quad (52)$$

On peut retrouver ce résultat à partir de la relation (35) ; connaissant la forme que prennent le tenseur d'expansion et son dual dans le modèle LTB :

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{R'\dot{R}'}{1+2E} & 0 & 0 \\ 0 & R\dot{R} & 0 \\ 0 & 0 & R\dot{R}\sin^2\theta \end{pmatrix} ; \quad \theta^{ij} = -\frac{1}{2} \dot{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1+2E}{R'^2} \frac{\dot{R}'}{R'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{R}}{R^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{R}}{R^3 \sin^2\theta} \end{pmatrix} , \quad (53)$$

on peut calculer $\theta^{ij}\theta_{ij}$, θ , θ^2 et $\dot{\theta}$:

$$\theta^{ij}\theta_{ij} = \left(\frac{\dot{R}'}{R'} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 ; \quad (54)$$

$$\theta = \frac{\dot{R}'}{R'} + 2 \frac{\dot{R}}{R} ; \quad (55)$$

$$\theta^2 = \left(\frac{\dot{R}'}{R'}\right)^2 + 4\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 4\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} ; \quad (56)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\ddot{R}'}{R'} - \left(\frac{\dot{R}'}{R'}\right)^2 + 2\frac{\ddot{R}}{R} - 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 , \quad (57)$$

et ainsi retrouver l'expression de la courbure scalaire (49).

3.2 La rétro-action dans un univers LTB

On va maintenant s'intéresser au calcul du terme de rétro-action dans le cas d'un modèle LTB, dont on rappelle l'expression en fonction des invariants cinétiques :

$$Q_{\mathcal{D}} = \frac{2}{3} \left\{ \left\langle (\theta - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}_t})^2 \right\rangle_{\mathcal{D}_t} \right\} - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}_t} . \quad (58)$$

On peut exprimer ces invariants en fonction des symboles de Christoffel (voir l'annexe B de [15]) :

$$\theta = \Gamma_{0k}^k = \frac{\dot{R}'R + 2\dot{R}R'}{R'R} ; \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 (\Gamma_{0k}^k)^2 - \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^3 \Gamma_{0k}^k \right)^2 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\dot{R}'}{R'} - \frac{\dot{R}}{R} \right\}^2 , \quad (59)$$

ce qui conduit à l'expression suivante du terme de rétro-action :

$$Q_{\mathcal{D}} = \frac{8\pi}{3V_{\mathcal{D}}} \left\{ 3 \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}^2 R)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr - \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \left[\int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr \right]^2 \right\} , \quad (60)$$

où $V_{\mathcal{D}}$ est le volume total du domaine et vaut :

$$V_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{3} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (R^3)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr . \quad (61)$$

On peut retrouver le résultat précédant en calculant le terme de rétro-action à partir des invariants scalaires :

$$\text{I} \equiv \theta = \frac{\dot{R}'}{R'} + 2\frac{\dot{R}}{R} ; \quad (62)$$

$$\text{II} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \theta^i \theta_j^j - \theta^{ij} \theta_{ij} \right\} = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} ; \quad (63)$$

$$\text{III} \equiv \det(\theta^i_j) = \frac{\dot{R}'\dot{R}^2}{R'R^2} , \quad (64)$$

et dont les valeurs moyennes valent :

$$\langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}_t}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}R^2)}{\sqrt{1+2E}} dr ; \quad (65)$$

$$\langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}_t}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}^2 R)}{\sqrt{1+2E}} dr ; \quad (66)$$

$$\langle \text{III} \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{4\pi}{3V_{\mathcal{D}_t}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}^3)}{\sqrt{1+2E}} dr . \quad (67)$$

Le terme de rétro-action s'obtient alors en utilisant l'équation (42).

3.3 La condition d'intégrabilité dans un univers LTB

Dans cette partie, on s'intéresse à la condition d'intégrabilité (Éq. 45), dans le cas d'un modèle LTB. Cette équation peut se réécrire, en utilisant le fait que $3\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \langle \theta \rangle$:

$$2\langle \theta \rangle Q_{\mathcal{D}} + \dot{Q}_{\mathcal{D}} + \frac{2}{3}\langle \theta \rangle \langle {}^3\mathcal{R} \rangle + \langle {}^3\mathcal{R} \rangle \cdot = 0 , \quad (68)$$

ce qui revient en utilisant les relations (52), (55) et (60) à l'équation intégrale suivante :

$$\frac{8\pi}{3V_{\mathcal{D}}} \left\{ 3 \left[-2 \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (E\dot{R})}{\sqrt{1+2E}} dr + \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}^3)}{\sqrt{1+2E}} dr + 2 \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (R\dot{R}\ddot{R})}{\sqrt{1+2E}} dr \right] - \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (R^2\dot{R})}{\sqrt{1+2E}} dr \left[-2 \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (ER)}{\sqrt{1+2E}} dr + \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial (R\dot{R}^2)}{\sqrt{1+2E}} dr + 4 \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (R^2\ddot{R})}{\sqrt{1+2E}} dr \right] \right\} = 0 .$$

En définissant la fonction f par : $f \equiv {}^3\mathcal{R} + 2\text{II}$, la condition d'intégrabilité devient :

$$\langle \dot{f} \rangle + \langle \theta \rangle \langle f \rangle = \frac{2}{3}\langle \theta \rangle \left\langle \frac{\partial_r (2R^2\ddot{R} + \dot{R}^2R - 2ER)}{R'R^2} \right\rangle = \frac{4}{3}\langle \theta \rangle \left\langle \frac{\partial_r (R^2\ddot{R} + GM)}{R'R^2} \right\rangle . \quad (69)$$

Or, en dérivant par rapport au temps la seconde relation l'équation (47), on montre que :

$$R^2\ddot{R} + GM = 0 . \quad (70)$$

On en déduit alors l'équation de conservation locale :

$$\dot{f} + \theta f = 0 . \quad (71)$$

Ce résultat peut également se retrouver de façon plus directe ; d'après l'équation de contrainte de Hamilton moyennée (Éq. 41) : $\langle f \rangle = 16\pi G\langle \rho \rangle$. Donc en utilisant l'équation de continuité moyennée, on obtient aisément l'équation (71). Ce résultat confirme ici une fois de plus la consistance entre les équations locales et les équations moyennées.

4 Domaines à symétrie sphérique et recherche de classe de solutions

On a vu dans les parties 2.1 et 2.2 que le terme de rétro-action pouvait, selon son signe, jouer le rôle de l'énergie noire ou de la matière sombre. On s'intéresse maintenant dans cette partie à la recherche de classe de solutions pour lesquelles ce terme s'annule.

4.1 Le théorème des sphères en fer de Newton

On s'intéresse tout d'abord au cas newtonien d'un domaine sphérique de rayon $r_{\mathcal{D}}$. En effet, il convient de remarquer que les invariants scalaires peuvent être écrits sous la forme d'une divergence :

$$\text{I} = \nabla \cdot \vec{\gamma}_{\text{I}} \quad ; \quad \text{II} = \nabla \cdot \vec{\gamma}_{\text{II}} \quad ; \quad \text{III} = \nabla \cdot \vec{\gamma}_{\text{III}} \quad , \quad (72)$$

où

$$\vec{\gamma}_{\text{I}} = \vec{v} \quad ; \quad \vec{\gamma}_{\text{II}} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right\} \quad ; \quad (73)$$

$$\vec{\gamma}_{\text{III}} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) \vec{v} - \left(\left[\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right] \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right\} \quad . \quad (74)$$

On s'intéresse plus particulièrement à un fluide de vorticité nulle. On montre alors que la vitesse s'exprime sous la forme $\vec{v} = S(r)\vec{e}_r$ et que les valeurs moyennes des invariants scalaires sont (voir annexe C) :

$$\langle \text{I} \rangle_{\mathcal{S}^2} = 3 \frac{S(r_{\mathcal{D}})}{r_{\mathcal{D}}} \quad ; \quad \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{S}^2} = 3 \frac{S^2(r_{\mathcal{D}})}{r_{\mathcal{D}}^2} \quad ; \quad \langle \text{III} \rangle_{\mathcal{S}^2} = \frac{S^3(r_{\mathcal{D}})}{r_{\mathcal{D}}^3} \quad . \quad (75)$$

Ainsi, dans un domaine à symétrie sphérique \mathcal{S}^2 :

– les invariants scalaires vérifient les relations :

$$\langle \text{II} \rangle_{\mathcal{S}^2} = \frac{1}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{S}^2}^2 \quad ; \quad \langle \text{III} \rangle_{\mathcal{S}^2} = \frac{1}{27} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{S}^2}^3 \quad , \quad (76)$$

– le terme de rétro-action est nul (voir l'  q. 29) : $Q_{\mathcal{S}^2} = 0$.

Les inhomog  nit  s produites localement n'ont pas d'incidence sur le comportement global du domaine. Ce résultat est à rapprocher du *théorème des sphères en fer*, démontré par Newton ; en effet, ce théorème précise qu'un astre présentant une distribution de matière inhomogène, mais à symétrie sphérique, possède à sa surface le même champ gravitationnel que celui d'un astre de même masse mais de distribution de matière homogène. Ce théorème rappelle le théorème de Birkhoff qui prétend qu'en relativité générale, le champ gravitationnel à la surface d'un astre, dont la distribution de masse est homogène, est le même que celui généré par une source ponctuelle de même masse [16].

4.2 Le théorème d'un univers toroïdal

On va maintenant utiliser le fait que ces invariants s'écrivent sous la forme de divergence. En utilisant le théorème de Gauss, on peut écrire le terme de rétro-action sous la forme :

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{D}}(t) &= 2 \frac{1}{V_{\mathcal{D}_t}} \int_{\mathcal{D}_t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma}_{\text{II}}) d^3x - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{V_{\mathcal{D}_t}} \int_{\mathcal{D}_t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma}_{\text{I}}) d^3x \right)^2 \\ &= 2 \frac{1}{V_{\mathcal{D}_t}} \int_{\partial \mathcal{D}_t} \vec{\gamma}_{\text{II}} d\vec{S} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{V_{\mathcal{D}_t}} \int_{\partial \mathcal{D}_t} \vec{\gamma}_{\text{I}} d\vec{S} \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (77)$$

Ainsi, si le fluide a un comportement périodique, l'espace sera alors assimilable à un 3-tore, ce qui revient à intégrer sur un volume sans bord ; chacune de ces intégrales sera alors nulle et, *a fortiori*, le terme de rétro-action également. Il faut toutefois avoir à l'esprit que si le terme de rétro-action s'annule alors le domaine se comporte comme un domaine homogène (les

équations d'accélération et d'expansion se réduisent aux équations de Friedmann) ; dans une telle configuration, les vitesses moyennes suivent la loi de Hubble : $v_H = H(t)x$, elles ne peuvent donc pas être périodiques. Il faut donc décomposer la vitesse totale en une partie homogène, qui subit un flot de Hubble v_H , et une partie périodique, qui contient les inhomogénéités, la vitesse propre u et dont la valeur moyenne est nulle (voir [6], [17]) :

$$\vec{v} = v_H \vec{x} + \vec{u} \quad ; \quad \langle \vec{v} \rangle_{\mathcal{D}_t} = v_H \vec{x} . \quad (78)$$

Le gradient de la vitesse s'écrivant alors : $v_{i,j} = H(t)\delta_{ij} + u_{i,j}$, le taux de cisaillement vaut : $\theta = 3H(t) + u_{i,i}$. On peut de plus noter que les termes de cisaillement et de vorticit e proviennent tous deux de la vitesse propre u . On peut, à partir de ces remarques, réexprimer les invariants scalaires :

$$I(v_{i,j}) = 3H(t) + I(u_{i,j}) ; \quad (79)$$

$$II(v_{i,j}) = 3H^2(t) + 2H(t)I(u_{i,j}) + II(u_{i,j}) , \quad (80)$$

où on a introduit les invariants scalaires de la vitesse propre :

$$I(u_{i,j}) = u_{i,i} ; \quad (81)$$

$$II(u_{i,j}) = \frac{1}{3}I^2(u_{i,j}) - \sigma^2 + \omega^2 . \quad (82)$$

On introduit finalement cette décomposition dans l'équation (29), pour obtenir l'expression du terme de rétro-action en fonction des invariants scalaires de la vitesse propre :

$$Q_{\mathcal{D}}(t) = 2\langle II(u_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}_t} - \frac{2}{3}\langle I(u_{i,j}) \rangle_{\mathcal{D}_t}^2 . \quad (83)$$

Le terme de rétro-action ne contient donc aucun terme provenant du flot de Hubble, il ne dépend que de termes dus à la vitesse propre du fluide qui reflètent les inhomogénéités de sa distribution.

Ainsi, dans un modèle où la vitesse propre du fluide est périodique :

- la moyenne de chacun des invariants scalaires de la vitesse propre est nulle,
- le terme de rétro-action est nulle : $Q_{\mathcal{T}^3} = 0$.

4.3 Univers LTB plat et quantités extrinsèques

En ayant à l'esprit les relations obtenues dans le théorème des sphères en fer ( q. 76), on cherche à trouver une généralisation du cas newtonien à un univers à symétrie sphérique en relativité générale. On obtient dans un univers LTB les relations suivantes :

$$\langle II \rangle_{LTB} - \frac{1}{3}\langle I \rangle_{LTB}^2 = \frac{4\pi}{3V_{\mathcal{D}}} \left\{ 3 \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}^2 R)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr - \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \left[\int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R} R^2)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr \right]^2 \right\} ; \quad (84)$$

$$\langle III \rangle_{LTB} - \frac{1}{27}\langle I \rangle_{LTB}^3 = \frac{4\pi}{27V_{\mathcal{D}_t}} \left\{ 9 \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R}^3)}{\sqrt{1+2E}} dr - \left(\frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \right)^2 \left[\int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (\dot{R} R^2)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr \right]^3 \right\} . \quad (85)$$

Dans le cas où E est nul :

- la métrique est celle d'un univers géométriquement plat,
- la fonction M est la fonction donnant la masse de matière au sein d'une boule de rayon $r_{\mathcal{D}} : M_{\mathcal{D}} = M(r_{\mathcal{D}})$,
- le volume de cette boule est simplement : $V_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{3} R^3(r_{\mathcal{D}}, t)$,
- les équations (84) et (85) deviennent :

$$\langle \text{II} \rangle_{LTB} = \frac{1}{3} \langle \text{I} \rangle_{LTB}^2 ; \quad (86)$$

$$\langle \text{III} \rangle_{LTB} = \frac{1}{27} \langle \text{I} \rangle_{LTB}^3 , \quad (87)$$

- le terme de rétro-action est nul : $Q_{LTB}(E=0) = 0$.

Dans un tel univers, on peut ainsi se contenter d'étudier les équations locales pour connaître l'évolution des quantités moyennées. On retrouve ainsi, par un nouveau calcul, la généralisation du cas newtonien déjà obtenue dans [12].

Par ailleurs, dans le cas où E n'est pas nul mais constant, le volume vaut : $V_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3(r_{\mathcal{D}}, t)}{\sqrt{1+2E}}$, la masse contenue dans le co-volume : $M_{\mathcal{D}} = \frac{M(r_{\mathcal{D}})}{\sqrt{1+2E}}$ et le terme de rétro-action est par contre lui toujours nul : $Q_{\mathcal{D}}(E_0) = 0$.

4.4 Univers LTB plat et quantités intrinsèques

On s'intéresse dans cette partie à un autre aspect du problème des inhomogénéités, en se posant la question de la détermination observationnelle des paramètres cosmologiques et notamment le calcul de la densité de matière moyennée. Pour cela, considérons un domaine de l'espace \mathcal{D} , qui contient une certaine masse $M_{\mathcal{D}}$ de matière, la densité moyenne est alors obtenue, comme on l'a déjà vu, par le rapport entre cette masse et le volume $V_{\mathcal{D}}$ de ce domaine. D'un point de vue pratique, l'observateur du haut de son télescope va pouvoir calculer, et ce de façon assez précise la masse de ce domaine. Par contre, pour ce qui est du volume, étant donné qu'il dépend de la métrique en chaque point de l'espace, il pourra difficilement être contrôlé dans un espace présentant des inhomogénéités ; par approximation et par simplicité, l'observateur va considérer que le domaine réel possède une métrique euclidienne. Pour pouvoir calculer le volume réel il faudrait se ramener à un domaine pour laquelle la métrique serait connue. Pour cela, on pratique un lissage du domaine réel par un flot de Ricci (Éq. 88), afin de passer d'une métrique "cabossée" mais réelle, à celle d'un domaine de géométrie connue dont on pourra calculer le volume ⁵ :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \beta} = -2R_{ij} , \quad (88)$$

où la famille de métriques est paramétrée par β ; par convention, $\beta = 0$ se réfèrera à la métrique réelle et $\beta = +\infty$, à la métrique lissée.

On s'intéresse alors à un domaine inhomogène de l'espace défini par l'équation $r_0 = \text{constante}$, où r_0 est le rayon géodésique ; plus "physiquement", on peut décrire ce domaine de la façon suivante : on se place en un point de l'espace et on éclaire simultanément toutes les directions

⁵On pourra noter les travaux de Hamilton sur les flots de Ricci [18] et ceux de Perelman qui a démontré que, sous un flot de Ricci, toute variété différentielle pouvait être lissée en un ensemble composé de morceaux associés à une des huit géométries élémentaires de Thurston [19].

par des sources lumineuses de même longueur d'onde. Le domaine qui nous intéresse est celui qui contient l'ensemble des trajectoires lumineuses de longueur r_0 ; ce domaine possède un certain volume $V_{\mathcal{D}_{\beta=0}}$. On effectue maintenant un lissage de ce domaine en rendant homogène la distribution de matière, mais en conservant la même masse totale et le même rayon géodésique. Ainsi, pour reprendre notre image, les rayons lumineux vont parcourir la même longueur r_0 , mais leur trajectoire sera modifiée du fait du changement de la métrique, et décriront donc un nouveau volume $V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}$. On peut alors relier la densité moyenne réelle $\langle \rho \rangle_{V_{\mathcal{D}_{\beta=0}}}$, à celle obtenue dans un domaine lissé $\langle \rho \rangle_{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}}$:

$$\langle \rho \rangle_{V_{\mathcal{D}_{\beta=0}}} = \langle \rho \rangle_{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}} \left(\frac{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}}{V_{\mathcal{D}_{\beta=0}}} \right). \quad (89)$$

Le lissage du domaine a également des influences sur le calcul de certaines quantités géométriques et notamment sur celui de la courbure scalaire. On peut ainsi montrer que sous un flot de Ricci, la courbure constante d'un modèle lissé ${}^3\mathcal{R}_{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}}$ est reliée à la courbure réelle moyennée $\langle {}^3\mathcal{R} \rangle_{V_{\mathcal{D}_{\beta=0}}}$ par la relation [20] :

$${}^3\mathcal{R}_{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}} = \langle {}^3\mathcal{R} \rangle_{V_{\mathcal{D}_{\beta=0}}} \left(\frac{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}}{V_{\mathcal{D}_{\beta=0}}} \right)^{-2/3} - Q_{\mathcal{D}}^R, \quad (90)$$

où le terme de rétro-action de courbure $Q_{\mathcal{D}}^R$ est défini par :

$$Q_{\mathcal{D}}^R = \int_0^{+\infty} \frac{V_{\mathcal{D}_{\beta}}(\beta)}{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}} \left[\frac{1}{3} \left\langle (\mathcal{R}(\beta) - \langle \mathcal{R}(\beta) \rangle_{\mathcal{D}_{\beta}})^2 \right\rangle_{\mathcal{D}_{\beta}} - 2 \left\langle \tilde{R}^{ij}(\beta) \tilde{R}_{ij}(\beta) \right\rangle_{\mathcal{D}_{\beta}} \right] d\beta, \quad (91)$$

où on a introduit la décomposition suivante du tenseur de Ricci : $R_{ij} = \frac{1}{3}g_{ij}\mathcal{R} + \tilde{R}_{ij}$, avec \mathcal{R} la courbure scalaire et \tilde{R}_{ij} la partie sans trace du tenseur de Ricci. En introduisant les invariants scalaires du tenseur de Ricci :

$$\text{I}(R^i_j) = \mathcal{R}; \quad (92)$$

$$\text{II}(R^i_j) = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{R}^2 - R^i_j R^j_i \right\} \quad (93)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{R}^2 - \left(\frac{1}{3} \delta^i_j \mathcal{R} + \tilde{R}^i_j \right) \left(\frac{1}{3} \delta^j_i \mathcal{R} + \tilde{R}^j_i \right) \right\} \quad (94)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3} \mathcal{R}^2 - \tilde{R}^{ij} \tilde{R}_{ij} \right\}, \quad (95)$$

$$\text{III}(R^i_j) = \det(R^i_j), \quad (96)$$

on peut réécrire la rétro-action de courbure en fonction des invariants scalaires :

$$Q_{\mathcal{D}}^R = \int_0^{+\infty} \frac{V_{\mathcal{D}_{\beta}}(\beta)}{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}} \left[4 \langle \text{II} \rangle_{\mathcal{D}_{\beta}} - \langle \text{I}^2 \rangle_{\mathcal{D}_{\beta}} - \frac{1}{3} \langle \text{I} \rangle_{\mathcal{D}_{\beta}}^2 \right] d\beta. \quad (97)$$

À partir des composantes du tenseur de Ricci à trois dimensions dans le cas d'un univers LTB :

$$R_{11} = -\frac{2R'E'}{R} \frac{1}{1+2E}; \quad (98)$$

$$R_{22} = - \left(2E + \frac{E'R}{R'} \right) ; \quad (99)$$

$$R_{33} = -\sin^2\theta \left(2E + \frac{E'R}{R'} \right) , \quad (100)$$

on peut calculer les invariants scalaires :

$$I = -\frac{4}{R^2 R'} \partial_r (ER) ; \quad (101)$$

$$II = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{4}{R^2 R'} \partial_r (ER) \right)^2 - (g^{11} R_{11})^2 - (g^{22} R_{22})^2 - (g^{33} R_{33})^2 \right\} \quad (102)$$

$$= 5 \left(\frac{E'}{R R'} \right)^2 + 4 \left(\frac{E}{R^2} \right)^2 + 12 \frac{E E'}{R^3 R'} ; \quad (103)$$

$$III = -\frac{2E'}{R^3 R'} \left(\frac{2E}{R} + \frac{E'}{R'} \right)^2 , \quad (104)$$

et dont les valeurs moyennes sont :

$$\langle I \rangle = -\frac{16\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (ER)}{\sqrt{1+2E}} dr ; \quad (105)$$

$$\langle I^2 \rangle = \frac{64\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \left\{ \frac{E'^2}{R'} + \frac{E^2 R'}{R^2} + 2 \frac{E E'}{R} \right\} \frac{dr}{\sqrt{1+2E}} ; \quad (106)$$

$$\langle II \rangle = \frac{4\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \left\{ 5 \frac{E'^2}{R'} + 4 \frac{E^2 R'}{R^2} + 12 \frac{E E'}{R} \right\} \frac{dr}{\sqrt{1+2E}} ; \quad (107)$$

$$\langle III \rangle = -\frac{8\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{E'}{R} \left(\frac{2E}{R} + \frac{E'}{R'} \right)^2 \frac{dr}{\sqrt{1+2E}} . \quad (108)$$

On peut finalement calculer la rétro-action de courbure dans un univers LTB :

$$Q_{LTB}^R(r_{\mathcal{D}}, E) = \int_0^{+\infty} \frac{V_{\mathcal{D}_\beta}(\beta)}{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}} \left\{ \frac{16\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \left[\frac{E'^2}{R'} + 4 \frac{E E'}{R} \right] \frac{dr}{\sqrt{1+2E}} - \frac{1}{3} \left[\frac{16\pi}{V_{\mathcal{D}}} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (ER)}{\sqrt{1+2E}} dr \right]^2 \right\} d\beta , \quad (109)$$

où on rappelle l'expression du volume : $V_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{3} \int_0^{r_{\mathcal{D}}} \frac{\partial_r (R^3)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr$.

Dans le cas où E est nul :

- les différentes composantes du tenseur de Ricci sont nulles,
- le terme de rétro-action de courbure est nul : $Q_{LTB}^R(r_{\mathcal{D}}, E=0) = 0$.

Ainsi le lissage du domaine n'a pas de conséquences autres que celles dues aux modifications de la valeur du volume.

Par ailleurs, dans le cas d'un univers où la fonction E est une fonction constante E_0 , ce terme vaut :

$$Q_{LTB}^R(r_{\mathcal{D}}, E_0) = -48 \int_0^{+\infty} \frac{V_{\mathcal{D}_\beta}(\beta)}{V_{\mathcal{D}_{\beta \rightarrow +\infty}}} \frac{E_0^2}{R^4(r_{\mathcal{D}}(\beta), t)} d\beta \quad (110)$$

5 Conclusion et perspectives

Nous avons ainsi obtenu, à travers l'introduction d'un nouveau formalisme qui prend en compte les inhomogénéités de l'Univers, que l'accélération apparente de l'expansion pouvait provenir du terme de rétroaction qui mimait l'énergie noire lorsque $Q_{\mathcal{D}}$ était positif et la matière sombre lorsqu'il était négatif. Nous avons ensuite démontré que ce terme s'annulait, et ce malgré les inhomogénéités, dans des modèles simples d'univers inhomogènes à symétrie sphérique en cosmologie newtonienne ou relativiste pour des domaines de courbure nulle. De plus, en s'intéressant au problème de la détermination observationnelle de la densité de matière, nous avons mis en évidence l'apparition d'une rétro-action de courbure lors du lissage d'un domaine présentant des inhomogénéités. Nous avons par la suite montré que ce terme était nul dans le cas d'un univers à symétrie sphérique de courbure nulle.

Dans le prolongement du travail effectué, il serait intéressant de fermer le système d'équations dans un cas plus général (ici, le système n'est fermé que dans le cas particulier où la courbure est nulle) ; pour cela, il serait naturel d'obtenir une loi d'évolution pour la rétro-action. Celle-ci pourra être obtenue à partir des dérivées temporelles des invariants scalaires, invariants dont nous avons obtenu l'expression dans ce rapport. Si nous parvenons alors à complètement fermer ce système, alors nous pourrions, dans un premier temps, considérer la limite des perturbations sur un fond FLRW afin de retrouver des résultats perturbatifs connus. Mais, une relation exacte nous offrira la possibilité supplémentaire d'étudier $Q_{\mathcal{D}}$ dans le cas non-perturbatif. Nous pourrions alors par la suite utiliser de tels résultats pour construire une approximation générique qui constituera une généralisation des résultats newtoniens obtenus dans [17]. Ceci constituera un des sujets de mon travail de thèse.

A Approche 3+1 de la relativité générale

Décomposition 3+1 de l'espace-temps

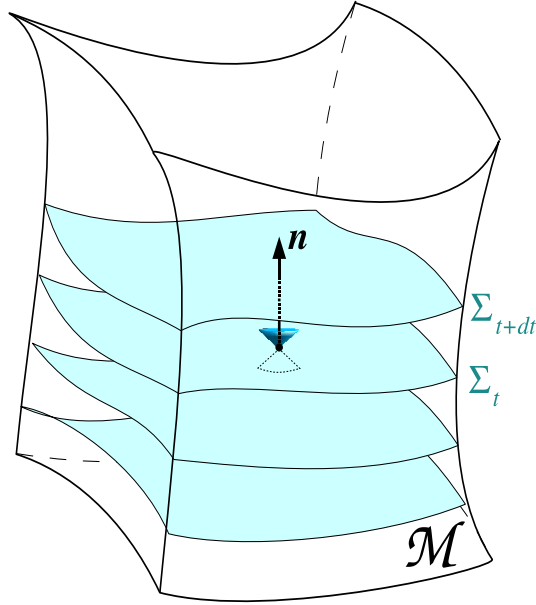


FIG. 1 – L'espace-temps \mathcal{M} est feuilleté en hypersurface de dimension 3 et de genre espace Σ_t que décrit le fluide à un instant donné. Le vecteur \vec{n} , orthonormal à ces hypersurfaces, est parallèle aux lignes du champ scalaire t ([10]).

Contexte géométrique

L'idée qu'a eu Einstein, et qui a conduit à la formulation de la relativité générale, est de donner une description intrinsèque du champ gravitationnel, c'est à dire de se débarrasser du plongement euclidien utilisé par Newton. Pour cela, on considère un fluide baignant dans un champ gravitationnel (et donc en chute libre) ; on oublie la vision newtonienne selon laquelle le fluide subit l'action d'une force, mais on considère que le fluide se déplace le long d'une géodésique d'un espace-temps courbe. On identifie donc, avec cette vision, la géométrie de l'espace-temps avec celle du fluide : le feuilletage que crée le fluide lors de son évolution sera notre choix de feuilletage de l'espace-temps, *cf.* Fig.1. On introduit ensuite un système de coordonnées locales (t, \vec{X}) , tels qu'à chaque instant t , une coordonnée spatiale \vec{X} est attachée à chaque élément du fluide ; le fluide est donc au repos par rapport à ce système de coordonnées. En relativité générale un tel système de coordonnées intrinsèques est appelé système de coordonnées synchrones et co-mouvantes.

On doit maintenant s'affranchir des coordonnées eulériennes $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$, qui nécessitent un plongement dans l'espace euclidien à travers les coordonnées du vecteur position \vec{f} . De même que la déformation du fluide dx_i nécessite un plongement dans un espace euclidien : $dx_i = f_{i|k} dX_k$. Il nous faut donc introduire de nouvelles variables intrinsèques pour traduire les déviations par rapport au déplacement lagrangien dX^i . Imaginons alors la situation suivante :

on se trouve sur la 3-variété Σ_t , au point P et dont l'espace co-tangent T_P^* a pour base dX^i . A partir de ce point on peut se déplacer dans trois directions différentes ; on suppose qu'on se dirige dans une direction donnée pour arriver au point N voisin de P ; ce point est repéré dans T_P^* par trois coordonnées. Au total, pour les trois directions de déplacement possibles, il faut 9 fonctions pour décrire la position du point N dans l'espace co-tangent. On construit ces nouvelles variables à partir des seules variables intrinsèques dont on dispose qui sont les déplacements lagrangiens. On définit ainsi les 1-formes de Cartan comme⁶ : $\eta^a = \eta_i^a dX^i$. La matrice η est une matrice 3×3 , les 9 éléments de matrices η_i^a sont les 9 fonctions dont on avait besoin.

A partir de ces 1-formes, on définit la métrique qui nous permettra de calculer des distances sur la variété, et ceci de manière intrinsèque :

$$g \equiv \delta_{ab} \eta^a \otimes \eta^b = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 . \quad (111)$$

On peut alors exprimer la métrique dans un système de coordonnées :

$$g \equiv g_{ij} dX^i \otimes dX^j , \quad (112)$$

où les $g_{ij} \equiv \delta_{ab} \eta_i^a \eta_j^b$ sont les composantes du tenseur métrique exprimées dans un système de coordonnées.

Avec cette vision géométrique, les propriétés cinétiques du fluide se traduisent par des déformations de l'espace-temps et donc par des évolutions des 1-formes de Cartan, ou plus particulièrement, par l'évolution du tenseur métrique. Il nous faut donc trouver l'équivalent relativiste de la dérivée eulérienne de la vitesse du fluide : $v_{i,j}$. Dans un cadre euclidien, le passage des dérivées eulériennes aux dérivées lagrangiennes de la vitesse s'effectue grâce à la relation : $v_{i,j} = v_{i|k} h_{k,i}$, où h est la fonction inverse de f : $h_{i,j} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial f_j}$. Toujours en procédant par correspondance, la dérivée lagrangienne de la vitesse dans un cadre newtonien : $v_{i|k} = \frac{\partial v_i}{\partial X^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial X^k}$, devient dans un cadre relativiste $\frac{\partial}{\partial t} \eta_i^a$. Pour trouver le correspondant relativiste de $h_{k,i}$ qui est rappelons-le l'inverse de $f_{k,i}$, il nous faut introduire non pas l'inverse mais les champs vectoriels duaux des 1-formes de Cartan, qu'on notera par la suite e_b et qui, par définition, exprimés dans un système de coordonnées, vérifient les relations suivantes :

$$\eta^a = \eta_i^a dX^i \quad ; \quad e_b = e_b^i \frac{\partial}{\partial X^i} \quad ; \quad \eta_i^a e_b^i = \delta_b^a . \quad (113)$$

Par conséquent, le gradient de vitesse du cadre newtonien est maintenant remplacé par :

$$\theta_b^a \equiv \dot{\eta}_i^a e_b^i . \quad (114)$$

Cet objet peut s'écrire dans un système de coordonnées, en utilisant les relations (113) et (114) :

$$\theta^i_j \equiv \eta^b_j e_a^i \theta_b^a = \dot{\eta}_j^a e_a^i . \quad (115)$$

On s'intéresse maintenant à l'évolution au cours du temps du tenseur métrique qui notons-le est un tenseur symétrique. Il convient de remarquer que dans notre choix de feuilletage, le vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$ est orthogonal à notre 3-variété. Dans un tel cadre, les dérivées spatiales et

⁶on notera la distinction entre les indices $\{a, b, c\} \in \{1, 2, 3\}$, qui numérotent les formes et les indices $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$ qui sont des indices de coordonnées.

temporelles commutent. On obtient alors la relation suivante donnant l'évolution du tenseur métrique :

$$\frac{1}{2}\dot{g}_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ab} \left(\dot{\eta}^a_i \eta^b_j + \eta^a_i \dot{\eta}^b_j \right) = \delta_{ab} \dot{\eta}^a_i \eta^b_j . \quad (116)$$

En utilisant le tenseur $\theta_{ij} \equiv g_{ik} \theta^k_j = \delta_{ab} \dot{\eta}^a_i \eta^b_j$, on aboutit à l'égalité :

$$\frac{1}{2}\dot{g}_{ij} = \theta_{ij} . \quad (117)$$

Le tenseur θ_{ij} , appelé tenseur d'expansion traduit donc, d'un point de vue actif, l'évolution temporelle du tenseur métrique. Le point de vue passif fait intervenir le tenseur de courbure extrinsèque $K_{ij} \equiv -\theta_{ij}$.

B Construction de la métrique LTB

Rappelons la forme de l'élément de longueur infinitésimal dans la représentation comovante que nous utilisons :

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t, r, \theta, \phi) dX^i dX^j , \quad (118)$$

qui devient dans le cas d'un domaine à symétrie sphérique :

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t, r) dr^2 + R^2(t, r) \{ d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \} . \quad (119)$$

À partir de la métrique et de la métrique inverse :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^2(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2(t, r) \sin^2\theta \end{pmatrix} ; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S^2(t, r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2(t, r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R^2(t, r) \sin^2\theta} \end{pmatrix} ,$$

on peut calculer les symboles de Christoffel non nuls ⁷ :

$$\Gamma_{11}^0 = S(t, r) \dot{S}(t, r) ; \Gamma_{22}^0 = R(t, r) \dot{R}(t, r) ; \Gamma_{33}^0 = \sin^2\theta R(t, r) \dot{R}(t, r) ;$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{S}(t, r)}{S(t, r)} ; \Gamma_{11}^1 = \frac{S'(t, r)}{S(t, r)} ; \Gamma_{22}^1 = -\frac{R(t, r) R'(t, r)}{S^2(t, r)} ; \Gamma_{33}^1 = -\frac{\sin^2\theta R(t, r) R'(t, r)}{S^2(t, r)} ;$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{R}(t, r)}{R(t, r)} ; \Gamma_{12}^2 = \frac{R'(t, r)}{R(t, r)} ; \Gamma_{33}^2 = -\cos\theta \sin\theta ;$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{R}(t, r)}{R(t, r)} ; \Gamma_{13}^3 = \frac{R'(t, r)}{R(t, r)} ; \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} ,$$

⁷ par convention, “ $\dot{}$ ” est la dérivée partielle par rapport au temps t et “ \prime ” est la dérivée partielle par rapport à la coordonnée radiale r

puis les composantes diagonales du tenseur de Ricci :

$$R_{00} = -\frac{\ddot{S}(t,r)}{S(t,r)} - 2\frac{\ddot{R}(t,r)}{R(t,r)} ;$$

$$R_{11} = \ddot{S}(t,r)S(t,r) - 2\frac{R''(t,r)}{R(t,r)} + 2\dot{S}(t,r)S(t,r)\frac{\dot{R}(t,r)}{R(t,r)} + 2\frac{S'(t,r)R'(t,r)}{S(t,r)R(t,r)} ;$$

$$R_{22} = \ddot{R}(t,r)R(t,r) + \frac{R'(t,r)S'(t,r)R(t,r)}{S^3(t,r)} - \frac{R''(t,r)R(t,r)}{S^2(t,r)} + \frac{\dot{R}(t,r)\dot{S}(t,r)R(t,r)}{S(t,r)} - \left(\frac{R'(t,r)}{S(t,r)}\right)^2 + \dot{R}^2(t,r) + 1 ;$$

$$R_{33} = \sin^2\theta \left\{ \ddot{R}(t,r)R(t,r) + \frac{R'(t,r)S'(t,r)R(t,r)}{S^3(t,r)} - \frac{R''(t,r)R(t,r)}{S^2(t,r)} + \frac{\dot{R}(t,r)\dot{S}(t,r)R(t,r)}{S(t,r)} - \left(\frac{R'(t,r)}{S(t,r)}\right)^2 + \dot{R}^2(t,r) + 1 \right\} ,$$

et enfin le scalaire de courbure :

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\mathcal{R} \equiv R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= 2\frac{\ddot{S}(t,r)}{S(t,r)} + 4\frac{\ddot{R}(t,r)}{R(t,r)} - 4\frac{R''(t,r)}{R(t,r)S^2(t,r)} + 4\frac{\dot{R}(t,r)\dot{S}(t,r)}{R(t,r)S(t,r)} + 4\frac{R'(t,r)S'(t,r)}{R(t,r)S^3(t,r)} \\ &+ 2\left(\frac{\dot{R}(t,r)}{R(t,r)}\right)^2 - 2\left(\frac{R'(t,r)}{R(t,r)S(t,r)}\right)^2 + \frac{2}{R^2(t,r)} . \quad (120) \end{aligned}$$

Pour notre modèle, on considère toujours un fluide parfait de poussière ; le tenseur d'énergie-impulsion est celui décrit dans la sous-partie (2.2.2). En introduisant ce tenseur et le tenseur de Ricci obtenu précédemment dans les équations d'Einstein, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} -2\frac{R''(t,r)}{R(t,r)S^2(t,r)} + 2\frac{\dot{R}(t,r)\dot{S}(t,r)}{R(t,r)S(t,r)} + 2\frac{R'(t,r)S'(t,r)}{R(t,r)S^3(t,r)} + \frac{1}{R^2(t,r)} + \left(\frac{\dot{R}(t,r)}{R(t,r)}\right)^2 \\ - \left(\frac{R'(t,r)}{R(t,r)S(t,r)}\right)^2 = 8\pi G\rho(r) ; \quad (121) \end{aligned}$$

$$2\frac{\ddot{R}(t,r)}{R(t,r)} + \frac{1}{R^2(t,r)} + \left(\frac{\dot{R}(t,r)}{R(t,r)}\right)^2 - \left(\frac{R'(t,r)}{R(t,r)S(t,r)}\right)^2 = 0 ; \quad (122)$$

$$-\frac{R''(t,r)}{R(t,r)S^2(t,r)} + \frac{\ddot{R}(t,r)}{R(t,r)} + \frac{\dot{R}(t,r)\dot{S}(t,r)}{R(t,r)S(t,r)} + \frac{R'(t,r)S'(t,r)}{R(t,r)S^3(t,r)} + \frac{\ddot{S}(t,r)}{S(t,r)} = 0 ; \quad (123)$$

$$\dot{R}'(t,r) = \frac{\dot{S}(t,r)}{S(t,r)}R'(t,r) . \quad (124)$$

De cette dernière équation, on tire que :

$$S(t, r) = f(r)R'(t, r) , \quad (125)$$

puis en définissant la fonction E par : $f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+2E(r)}}$, on obtient finalement la métrique LTB :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'^2(t, r)}{1 + 2E(r)} dr^2 + R^2(t, r) \{d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\} . \quad (126)$$

C Les invariants cinématiques dans un domaine à symétrie sphérique

Exprimé dans un système de coordonnées sphériques, le rotationnel de la vitesse s'écrit de manière générale :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} (v_\phi \sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} \right\} \vec{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r} (v_\phi r) \right\} \vec{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta r) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta} \right\} \vec{e}_\phi . \end{aligned}$$

En imposant une vorticité nulle dans une géométrie à symétrie sphérique, ce système se restreint à :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (v_\phi \sin\theta) = 0 ; \quad (127)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_\phi r) = 0 ; \quad (128)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_\theta r) = 0 . \quad (129)$$

ou de manière équivalente :

$$v_\phi = \frac{f(r, \phi)}{\sin\theta} ; \quad (130)$$

$$v_\phi = \frac{g(\theta, \phi)}{r} ; \quad (131)$$

$$v_\theta = \frac{h(\theta, \phi)}{r} . \quad (132)$$

Dans le cas d'une symétrie sphérique la vitesse est donc de la forme $\vec{v}(r) = S(r)\vec{e}_r + \frac{C}{r}\vec{e}_\theta$. On peut alors calculer explicitement les invariants scalaires, dont on rappelle l'expression :

$$\text{I} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma}_\text{I} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} ; \quad (133)$$

$$\text{II} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma}_\text{II} = \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right\} ; \quad (134)$$

$$\text{III} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma}_\text{III} = \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) \vec{v} - \left(\left[\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right] \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right\} . \quad (135)$$

On peut calculer ces divergences dans le cas sphérique en utilisant la formule :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} . \quad (136)$$

On obtient le résultat :

$$\vec{\gamma}_I = S(r) \vec{e}_r + \frac{C}{r} \vec{e}_\theta ; \quad (137)$$

$$\vec{\gamma}_{II} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{r} S^2(r) + \frac{CS(r) \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{C}{r} \partial_r S(r) + \frac{3C}{r^2} S(r) + \frac{C^2 \cos \theta}{r^3 \sin \theta} \right) \vec{e}_\theta \right\} . \quad (138)$$

Or, le domaine est à symétrie sphérique, les différentes fonctions ne peuvent donc dépendre ni de ϕ , ni de θ . Par conséquent, on doit imposer que $C = 0$. La vitesse a alors simplement la forme $\vec{v}(r) = S(r) \vec{e}_r$ et d'autre part $\vec{\gamma}_I = S(r) \vec{e}_r$, $\vec{\gamma}_{II} = \frac{S^2(r)}{r} \vec{e}_r$, $\vec{\gamma}_{III} = \frac{S^3(r)}{3r^2} \vec{e}_r$. On peut alors calculer la valeur moyenne des invariant scalaires :

$$\langle I \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d^3x = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{v} d\vec{S} ; \quad (139)$$

$$\langle II \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma}_{II} d^3x = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{\gamma}_{II} d\vec{S} ; \quad (140)$$

$$\langle III \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma}_{III} d^3x = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{\gamma}_{III} d\vec{S} , \quad (141)$$

où on a naturellement utilisé le théorème de Gauss dans les dernières égalités. Dans le cas d'un domaine sphérique de rayon $r_{\mathcal{D}}$, le volume est donné par $V_{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{3} r_{\mathcal{D}}^3$ et l'élément de surface infinitésimal est donné par l'expression $d\vec{S} = r_{\mathcal{D}}^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r$. On peut alors obtenir les valeurs moyennes des invariants scalaires :

$$\langle I \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{3}{4\pi r_{\mathcal{D}}^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi S(r_{\mathcal{D}}) r_{\mathcal{D}}^2 \sin \theta d\theta = 3 \frac{S(r_{\mathcal{D}})}{r_{\mathcal{D}}} ; \quad (142)$$

$$\langle II \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{3}{4\pi r_{\mathcal{D}}^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi S^2(r_{\mathcal{D}}) r_{\mathcal{D}} \sin \theta d\theta = 3 \frac{S^2(r_{\mathcal{D}})}{r_{\mathcal{D}}^2} ; \quad (143)$$

$$\langle III \rangle_{\mathcal{D}_t} = \frac{3}{4\pi r_{\mathcal{D}}^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{S^3(r_{\mathcal{D}})}{3} \sin \theta d\theta = \frac{S^3(r_{\mathcal{D}})}{r_{\mathcal{D}}^3} . \quad (144)$$

Références

- [1] Gott, J.R., Jurić, M., Schlegel, D., Hoyle, F., Vogeley, M., Tegmark, M., Bahcall, N., Brinkmann, J. : *A Map of the Universe* - *Astrophys.J.* 624 (2005) 463.
- [2] Hinshaw, G. et al. : *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : data processing, sky maps, & basic results* - arxiv.org/abs/0803.0732v1 (2008).
- [3] Astier, P. et al. : *The Supernova Legacy Survey : Measurement of Ω_M, Ω_Λ and w from the First Year Data Set* - *Astron.Astrophys.* 447 (2006) 31-48.
- [4] Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S. : *Dynamics of dark energy* - *Int.J.Mod.Phys.* D15 (2006) 1753-1936.
- [5] Futamase, T. : *Averaging of a Locally Inhomogeneous Realistic Universe* - *Phys. Rev. D* **53** 681 (1996).
- [6] Buchert, T., Ehlers, J. : *Averaging Inhomogeneous Newtonian Cosmologies* - *Astron. Astrophys.* 320 (1997) 1-7.
- [7] Ehlers, J., Buchert, T. : *Newtonian cosmology in Lagrangian formulation : foundations and perturbation theory* - *Gen.Rel.Grav.* 29 (1997) 733-764.
- [8] Buchert, T. : *On Average Properties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity I : Dust Cosmologies* - *Gen.Rel.Grav.* 32 (2000) 105-125.
- [9] Buchert, T. : *Dark Energy from structure : a status report* - *Gen.Rel.Grav.* 40 (2008).
- [10]ourgoulhon, E. : *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity*- [arXiv :gr-qc/0703035](http://arXiv.org/gr-qc/0703035) (2007).
- [11] Lemaitre, G. : *Annales Soc. Sci. Brux. Ser. I Sci. Math. Astron. Phys.* A 53 :51, 1933.
Tolman, R.C. : *Proc. Nat. Acad. Sci.* 20 :169, 1934.
Bondi, H. : *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 107 : 410 (1947).
- [12] Paranjape, A., Singh, T.P. : *The possibility of Cosmic Acceleration via Spatial Averaging in Lemaitre-Tolman-Bondi Models* - *Class.Quant.Grav.* 23 (2006) 6955-6969.
- [13] Bolejko, K., Andersson, L. : *Apparent and average acceleration of the Universe* - [arXiv :0807.3577v1](http://arXiv.org/abs/0807.3577v1) (2008).
- [14] Enqvist, K. : *Lemaitre-Tolman-Bondi model and accelerating expansion* - *General Relativity and Gravitation*, Volume 40, Issue 2-3, pp. 451-466 (2008).
- [15] Marra, V. : *A Backreaction Approach to Dark Energy* - [arXiv :0803.3152v2](http://arXiv.org/abs/0803.3152v2) (2008).
- [16] Einstein, A., Straus, E. : *The influence of the expansion of space on gravitational fields surrounding individual stars* - *Rev. of Mod. Phys.* vol 17, numbers 2 and 3 (1945).
- [17] Buchert, T., Kerscher, M., Sicka, C. : *Back reaction of inhomogeneities on the expansion : The evolution of cosmological parameters* - *Phys. Rev. D* **62** 043525 (2000).
- [18] Hamilton, R. : *Three-manifolds with positive Ricci curvature* - *J. Diff. Geom* **17** 255 (1982).
- [19] Perelman, G. : *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications* - [arXiv :math/0211159v1](http://arXiv.org/abs/math/0211159v1) (2002).
- [20] Buchert, T., Carfora, M. : *Regional Averaging and Scaling in Relativistic Cosmology* - *Class.Quant.Grav.* 19 (2002) 6109-6145.